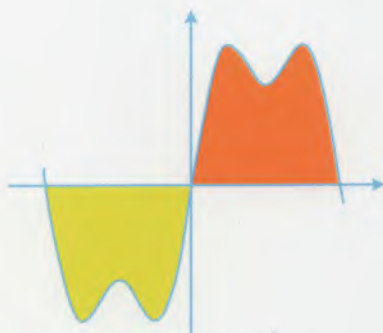
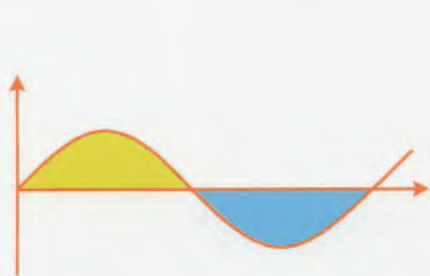


盖尔范德中学生数学思维丛书

 Springer



三角函数

Trigonometry



[乌克兰] 伊斯雷尔·盖尔范德

[美] 马克·索尔

王作勤

著
译

沃尔夫数学奖获得者**盖尔范德**经典力作

中国科大数学教授倾情推荐并翻译

让数学思维成为惯性思维 让数学高分不再是梦想

中国科学技术大学出版社



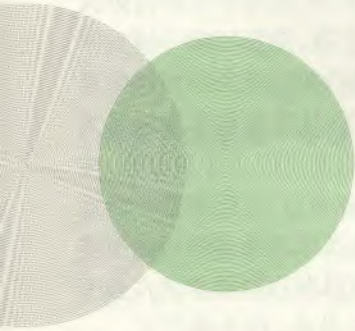
王作勤，中国科学技术大学数学科学学院教授、博导。本科就读于中国科学技术大学数学系，2008年获得美国麻省理工学院博士学位，曾在美国约翰霍普金斯大学以及密西根大学工作。研究方向为谱几何、辛几何等，在国际核心期刊发表论文多篇。翻译出版畅销书《美丽数学》《魅力数学》。

盖尔范德中学生数学思维丛书

三角函数

Trigonometry

[乌克兰] 伊斯雷尔·盖尔范德 著
[美] 马克·索尔 译
王作勤 译



中国科学技术大学出版社

安徽省版权局著作权合同登记号:第 12191906 号

First published in English under the title

Trigonometry by I. M. Gelfand and Mark Saul

Copyright © 2001 I. M. Gelfand

This edition has been translated and published under licence from Springer Science + Business Media, LLC, part of Springer Nature.

Chinese Simplified translation rights © 2020 University of Science & Technology of China Press

此版本仅限在中华人民共和国境内(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)销售。

图书在版编目(CIP)数据

三角函数/(乌克兰)伊斯雷尔·盖尔范德(I. M. Gelfand),(美)马克·索尔(M. Saul)著;王作勤译.—合肥:中国科学技术大学出版社,2020.12(2023.2重印)

(盖尔范德中学生数学思维丛书)

ISBN 978-7-312-04695-7

I. 三… II. ①伊… ②马… ③王… III. 中学数学课—初中—教学参考资料
IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 087146 号

三角函数

SANJIAO HANSHU

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://www.press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjsdxcbcs.tmall.com>

印刷 安徽国文彩印有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×1000 mm 1/16

印张 14

字数 194 千

版次 2020 年 12 月第 1 版

印次 2023 年 2 月第 5 次印刷

定价 65.00 元

译者序

中学数学教育的重要性毋庸多言. 中学数学该怎么学? 这是一个重大的课题, 可能每位数学老师都有自己的独特见解. 译者们在大学里教授数学课程时, 时常能见到很多在中学阶段学习成绩很好的学生, 在学习大学数学的过程中难以适应, 甚至屡屡碰壁. 究其原因, 中学阶段的数学教学往往是以训练解题技巧为主, 学生们可以通过做大量的练习提高熟练度, 进而提高成绩. 但要学好大学数学, 则需要学生们主动思考, 理解数学思维, 提高数学素养. 就数学教育而言, 这种脱节是十分令人遗憾的. 能否找到一些更加强调数学思维的数学教材, 让我们的中学生们在未来进入大学后可以比较快地适应大学数学课程呢?

大约两年前, 本丛书的译者之一在北美进行学术交流时, 有幸由加拿大麦吉尔 (McGill) 大学管鹏飞教授介绍而接触到本丛书. 管鹏飞教授盛赞了这套丛书, 认为它体系独特, 并且强调了数学是如何自然引出和走向远方的. 在粗略阅读后, 我们发现这套丛书的作者确实是高屋建瓴, 对于很多知识点的引入非常精妙, 前后知识点的衔接非常自然, 就连习题的设置也常常别出心裁. 更重要的是, 贯穿于正文与习题深处的, 正是我们一直希望学生们能早点掌握的数学思维方式. 开始时, 我们只是想着让自己的孩子学习这套丛书. 后来仔细一想, 既然这套丛书这么好, 而国内又难以见到, 为什么不翻译出来让大家都能获益呢?

这套丛书的主创者伊斯雷尔·盖尔范德 (I. M. Gelfand) 是 20 世纪非常伟大的数学家之一. 他是首届沃尔夫奖 (数学终身成就奖, 1978 年开始颁发, 被誉为数学领域的诺贝尔奖) 获得者, 在数学、数学物理、生物学等多个

学科都做出了卓越的贡献.此外,盖尔范德还是一位杰出的数学教育家.他不仅培养出了大量极其优秀的数学工作者,创立了“盖尔范德学派”,还先后在苏联和美国建立了旨在促进中学数学教育的函授学校,并为中学生们撰写了多本优秀的教材.在教学上,他善于启发和提出问题,善于从新的角度重新思考已知的结果.这些特点在这套丛书中表现得淋漓尽致.可以说,除了他证明的诸多高深而绝妙的定理外,这套丛书同样是盖尔范德为后人留下的宝贵财富.

我们翻译这套丛书,并非是希望用这些书去替代现有的中学教材,这样既不现实,也并不符合我们目前的考纲和考情.但我们相信,这套丛书能够成为中学生们绝佳而“另类”的课外数学读物.目前,市面上流行的课外读物大多可归于两类:一类是以奥数为导向的,主要是把复杂的数学技巧模块化,训练中学生们解答难题的能力;另一类是趣味数学读物,要么讲讲有趣的数学故事或者带领大家领略数学史上的一些奇观,要么把数学知识糅合在各种故事或趣题中.这些书或可提升中学生们的解题能力,或可提升中学生们学习数学的兴趣.但它们并不系统,尤其缺乏核心营养,即缺乏对建立核心数学思维方式的引导.我们希望本丛书能为中学生们补一补核心营养.

本丛书的起点并不高,绝大部分内容只要是基础较扎实的初中生就可以“读懂”.但我们对读者的建议是,读这些书的时候一定要多思考,因为知道为什么比知道是什么更重要.要有渴求知识和探索问题的愿望.多读、多练、多思考,学习从来都没有捷径,从来都不可能不劳而获.每本书都如一架长长的梯子,它们往往是通往高等数学的重要路径.

目前,在很多学校都流行着一个“短板理论”,即把每位学生都比喻为一个木桶,而把学习的过程比喻为往桶里装水的过程,由此激励大家不要有短板,因为木桶能装的水量取决于该木桶最短木板的高度.但我们想说的是,作为老师,我们并不应该把学生们当作一个个有待我们去填满的木桶.他们更应是一个个火种,一旦以合适的方式点燃,就可以自己燃烧,乃至光芒四射!

希望本丛书能为读者们开启一扇理解数学的窗口.

麻希南 王作勤

2020年12月

前言

从某种意义上说,三角函数处于高中数学的中心位置.三角函数源自对几何的研究,比如在我们考察相似直角三角形中的边长比时,或者考虑圆里面的弦跟它所割出的弧的关系时.有了这个利器,我们还可以深入研究周期函数,或者研究所谓的**超越**函数,后者是不能用有限次的代数过程描述的.在物理学、天文学以及科学的其他分支中,三角函数也都有着广泛的应用.

这是一个很古老的学科.很多我们现在用三角函数术语描述的几何结果,欧几里得(Euclid)就曾经给出过纯几何的阐述.而古希腊天文学家托勒密(Ptolemy)则开始超越欧几里得:他使用那个时代的几何学,编制了我们现在称之为三角函数数值表的弦表.

三角函数是微积分的重要铺垫.在微积分里,我们研究的函数性质被数学家们称为**分析**性质.本书的目的之一是为微积分课程做一个准备:我们会将读者的注意力从计算具体的函数值引导至研究函数本身的性质.这样的思维方式不但适用于微积分,而且也常见于很多其他的情境中.所以三角函数是微积分预修课程之一,而且跟其他的微积分预修专题例如指数与对数函数、复数都有关.这些专题跟三角函数的相互作用,产生了一批全新的数学结果.同时,这些数学结果本身也都是非常重要的,并不仅仅是作为某样东西的“预修”结果而存在.

我们试图尽可能简单而系统地解释三角函数中的漂亮结果.很多时候我们都发现,简单的问题与意义长远的深刻思想是密切相关的.在一些时候我们会特意指出这

些联系,而在另一些时候我们则把这些联系留给读者,让读者在学习时自行发现.

· 关于习题:对于各种“常规”类型的题目,我们都尽可能地列出了相应的典型例题,但分量较少.若读者需要做更多这样的练习题,可以很容易地在别处找到.本书的大部分练习题要么是有一定挑战性的,要么可以展示出所讨论技巧或对象的新的层面.我们尽可能地让每道练习题都能够讲述有关数学的一点点“小故事”,而所有这些“小故事”合在一起则可以有助于读者形成深刻的理解.

若读者喜欢这本书并能够从书中学到东西,我们将会非常高兴.我们非常享受写作这本书的过程,从中也学到了很多.

目 录

译者序 (i)

前言 (iii)

第 1 章 三角函数 (001)

1.1 三角函数,新在何处? (001)

1.2 直角三角形 (005)

1.3 勾股定理 (006)

1.4 我们在直角三角形家族中最要好的
朋友们 (008)

1.5 我们在直角三角形家族中第二要好的
朋友们 (010)

1.6 一些标准的记号 (012)

附录 (013)

第 2 章 三角形中的三角比 (020)

2.1 $\sin \alpha$ 的定义 (020)

2.2 计算隐藏的正弦 (022)

2.3 余弦比 (023)

2.4 正弦与余弦之间的一个关系 (024)

2.5 一些记号 (025)

2.6 正弦与余弦之间的另一个关系式 (026)

2.7 我们第二要好的朋友们(和正弦比) (026)

2.8 $\sin 90^\circ$ 的值是多少? (028)

2.9 一次探索:和可以有多大? (029)

2.10 又一次的探索:积可以有多大? (030)

2.11 更多的比值,更多的三角函数	(031)
第3章 三角比之间的关系	(034)
3.1 正弦与它的亲戚们	(034)
3.2 代数还是几何?	(036)
3.3 关于名字的一个注记	(037)
3.4 恒等式危机?	(038)
3.5 关于正割和余割的恒等式	(040)
3.6 一个引理	(041)
3.7 一些不等式	(042)
3.8 计算器与表格	(043)
3.9 从一个角的正弦值得到它的度数值	(045)
3.10 解直角三角形	(046)
3.11 影子	(047)
3.12 正弦比的另一种途径	(048)
附录 几何学复习	(051)
第4章 三角形内的关系	(055)
4.1 三角形的几何	(055)
4.2 全等定理与三角函数	(056)
4.3 正弦与高	(057)
4.4 钝角三角形	(058)
4.5 正弦定律	(059)
4.6 外接圆半径	(061)
4.7 三角形的面积	(062)
4.8 两个注记	(065)
4.9 余弦定律	(065)
附录 三大理念及其应用	(069)
第5章 角与旋转	(077)
5.1 测量旋转角	(077)
5.2 旋转与角度	(078)
5.3 所有角的三角函数	(079)
5.4 带旋转角的计算	(082)
5.5 奇函数与偶函数	(085)

第 6 章 弧度法	(088)
6.1 角与旋转的弧度法	(088)
6.2 弧度表示法与距离	(093)
6.3 插曲:怎样向弟弟妹妹们解释弧度表示法	(097)
6.4 弧度表示法与计算器	(098)
6.5 一个重要的图	(099)
6.6 两个小奇迹	(101)
附录 弧度表示法的一些优点	(102)
第 7 章 加法公式	(108)
7.1 更多的恒等式	(108)
7.2 加法公式	(109)
7.3 加法公式的证明	(110)
7.4 第一个漂亮证明	(111)
7.5 第二个漂亮证明	(113)
附录 托勒密定理及其与加法公式的关系	(116)
第 8 章 三角恒等式	(121)
8.1 扩大恒等式的范围	(121)
8.2 解析延拓原理:高等数学来救场	(121)
8.3 回到我们的恒等式	(124)
8.4 $\tan(\alpha + \beta)$ 的一个公式	(126)
8.5 倍角公式	(127)
8.6 三倍角	(129)
8.7 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 和 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的公式的推导	(130)
8.8 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的另一个公式	(133)
8.9 积化和差	(134)
8.10 和差化积	(135)
附录	(138)
第 9 章 三角函数的图形	(153)
9.1 画基础的正弦曲线	(153)
9.2 函数 $y = \sin x$ 的周期	(155)
9.3 其他正弦曲线的周期	(156)

9.4	正弦曲线的振幅	(158)
9.5	平移正弦曲线	(160)
9.6	平移且拉伸	(164)
9.7	一些特殊的平移:半周期	(165)
9.8	画正切函数与余切函数	(169)
9.9	关于正弦函数之和的一个重要问题	(170)
9.10	正弦函数与余弦函数的线性组合	(171)
9.11	具有相同频率的正弦曲线的线性组合 ...	(174)
9.12	不同频率函数的线性组合	(176)
9.13	求不同周期的正弦曲线之和的周期	(178)
9.14	傅里叶先生的一个发现	(179)
	附录	(182)
第 10 章	反函数与三角方程	(189)
10.1	函数与反函数	(189)
10.2	反正弦:正弦函数的反函数	(191)
10.3	反函数作图	(198)
10.4	三角方程	(200)
10.5	一个更一般的三角方程	(204)
10.6	更复杂的三角方程	(205)
	附录 奇迹揭秘	(210)

第 1 章

三角函数

Trigonometry 源自希腊语 $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\omicron-\nu$ (三角形) + $-\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ (测量).

——牛津英语词典

在这一章里,我们会理一理几何学中的一些结果,这些结果将会为研究三角函数铺平道路.

1.1 三角函数,新在何处?

在几何学里,我们学过的最基础的两类图形莫过于三角形与圆了.而在三角函数里,对于这两类图形,我们可以学到更多的东西.

例如,在几何学里,我们学过:如果我们知道一个三角形三条边的边长,那么它的三个角也就完全被确定下来了^①(事实上,该三角形的几乎一切性质都可以被确定下来了).但是,除了少数几种非常特殊的三角形,几何学还没有告诉我们怎样通过这三条边的边长来计算出三个

① 我们常常说三条边的边长决定了一个三角形.但在这么想的时候,我们一定要稍微小心一点.任意给定三个长度值,我们有可能以它们为边长组成一个三角形,也有可能根本组不成一个三角形——这三个长度值可以组成一个三角形,当且仅当这三个长度值中的任意两个之和都大于第三个值.当然,如果可以组成一个三角形,那么这个三角形的三个角就确实是完全被确定了的.

角的大小.

例 1.1 一个三角形,它的三条边的边长分别是 6 厘米,6 厘米和 6 厘米.那么,它的三个角分别是多大?

解 这个三角形三条边的边长相等,因此它的三个角也一样大.因为三个角之和是 180° ,所以每个角都是 $180^\circ/3=60^\circ$.所以,通过几何学,我们不用量这些角,甚至不用把三角形画出来,就可以知道这些角有多大.

例 1.2 一个三角形,它的三条边的边长分别是 5 厘米,6 厘米和 7 厘米.那么,它的三个角分别是多大?

解 我们无法通过几何学来求出这些角有多大.我们最多只能把这个三角形画出来,然后用量角器量一量各个角.但我们怎么知道量出来的角有多精确呢?我们将会在第 4 章回答这个问题.

例 1.3 一个三角形,它的两条边的边长分别是 3 厘米和 4 厘米,而且这两条边之间的夹角是 90° .那么,第三条边的边长是多长?另外两个角分别是多大?

解 在几何学中,如果我们知道一个三角形的两条边以及这两条边之间的夹角,那么我们就应该能够把该三角形其余的量都定下来.就这个问题而言,我们可以用勾股定理(见本章 1.3 节)来算出这个三角形第三边的边长是 5 厘米.但几何学无法告诉我们另外两个角分别是多大.我们将在第 3 章中学习如何求出那两个角.



练习

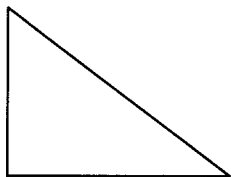


图 1.1

用量角器尽可能准确地量一量图 1.1 中这个三角形的各个角.你量出来的角度加起来是 180° 吗?

下面我们考虑圆形.

例 1.4 在一个圆里,已知一个 20° 的圆心角所正对的圆弧长度是 5 英寸^①.问:在这个圆中, 40° 的圆心角所正对的圆弧有多长?

解 我们可以把 40° 的圆心角分割成两个 20° 的圆心角,这两个小的圆心角所正对圆弧的长度都是 5 英寸,所以 40° 的圆心角所正对的圆弧,其长度是 $5+5=10$ (英

① 1 英寸 = 2.54 厘米.

寸),如图 1.2 所示.

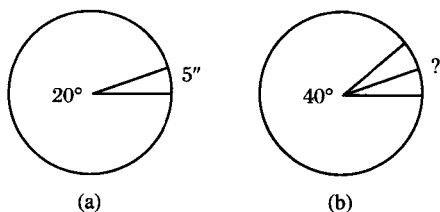


图 1.2

我们发现,如果把圆心角加倍,那么它所正对的圆弧长度也加倍了.

例 1.5 在一个圆里,已知一个 20° 的圆心角所正对的弦长度是 7 英寸.问:在这个圆中, 40° 的圆心角所正对的弦有多长?

解 我们可以像例 1.4 中所做的那样,把 40° 的圆心角分割成两个 20° 的圆心角,如图 1.3 所示.

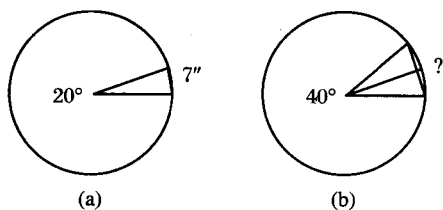


图 1.3

然而,用这两个 20° 的圆心角所对弦的长度去计算原来那个 40° 的圆心角所对弦的长度,这件事情并不简单.虽然圆心角加倍了,但它所对的弦长显然并没有加倍.



练习

1. 假如我们在一个圆里,先随意画一个圆心角,然后再画一个比第一个圆心角更大一点的圆心角.问:第二个圆心角所正对的圆弧总比第一个圆心角所正对的圆弧更长吗?第二个圆心角所正对的弦也比第一个圆心角所正对的弦更长吗?

2. 几何学中的哪个定理能够告诉我们, 40° 的圆心角所对的弦,其长度一定小于 20° 的圆心角所对弦长度的两倍?

3. 假如我们先随意画一个圆心角, 然后把它加倍. 问: 加倍后的圆心角所对弦的长度, 是否一定小于原来那个圆心角所对弦长度的两倍?

从三角函数和几何学我们知道, 在同一个圆里, 任何两段相同的弧所对应的弦也一样长; 换言之, 如果我们知道弧的尺寸, 那么它所截的弦的长度也就确定了. 但是, 除了少数非常特殊的情形外, 几何学并没有给出足够的工具, 让我们能够通过弧的尺寸去计算弦的长度.

例 1.6 在一个半径为 7 的圆里, 90° 的弧所对的弦有多长?

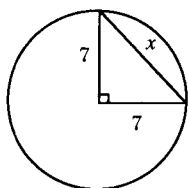


图 1.4

解 如果把该弦的两个端点与圆心连起来, 我们将会得到一个等腰直角三角形, 如图 1.4 所示.

于是, 我们可以通过勾股定理来算出弦的长度. 假设弦的长度是 x , 那么 $7^2 + 7^2 = x^2$, 所以 $x = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

例 1.7 在一个半径为 7 的圆里, 38° 的弧所对的弦有多长?

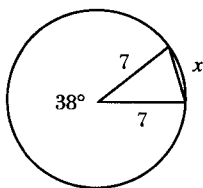


图 1.5

解 几何学并没有给出用以解决这个问题的工具. 如图 1.5 所示, 我们可以像在例 1.6 中所做的那样画一个三角形.

但我们无法仅仅使用几何学知识就算出这个三角形的第三边边长. 不过, 这个例子确实表明: 在三角形里的测量结果与在圆里的测量结果是密切相关的.



练习

1. 几何学里面的什么定理能够告诉我们例 1.7 中的三角形是完全确定的?

2. 注意, 例 1.7 中的三角形是等腰三角形. 请算出另外两个角的大小.

三角函数会帮助我们解决所有这类问题. 另一方面, 三角函数并不仅仅是几何学的一个延伸, 它在科学诸多分支中的应用不胜枚举.

例 1.8 观察一个正在摆动的钟摆. 你会发现摆锤在靠近其轨迹的两个端点处时移动得非常慢, 而在朝着中

心移动时会加速. 它在其轨迹的中心附近摆动最快.

例 1.9 图 1.6 展示的是在某个纬度处, 1995 年每个礼拜三的日出时间(已经修正了夏令时所带来的变化). 我们把数据点用一条光滑的曲线连接起来, 从而得到一条基于全年的连续曲线.

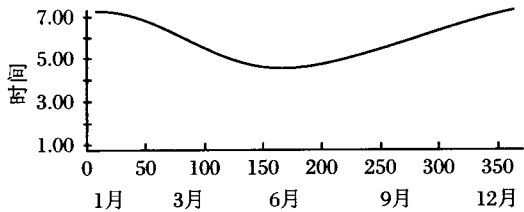


图 1.6

我们认为这条曲线应该年复一年地基本保持一致. 然而, 无论是几何学还是代数学, 都无法给出一个这条曲线的公式. 在第 9 章中, 我们将会看到如何使用三角函数来从数学上描述这条曲线. 三角函数可以让我们深入研究任何周期现象——任何不断重复的物理运动或者变化.

1.2 直角三角形

我们将从三角形开始学习三角函数. 我们暂时只考虑直角三角形, 一旦我们把直角三角形掌握透彻, 对于其他的三角形也就可以理解得比较清楚了.

假设你想通过电子邮件向你的朋友描述一个三角形. 根据几何学的知识, 你知道需要描述三条信息(三条边的边长, 或者两条边的边长以及它们的夹角大小, 等等). 而对于直角三角形, 我们只要描述两条信息就够了, 因为已经知道有一个角的大小是 90° .

在选择需要描述的两条信息时, 我们需要至少包含一条边的边长, 所以可以分四种情况来讨论:

- (1) 两条直角边的长度[图 1.7(a)];
- (2) 斜边和一条直角边的长度[图 1.7(b)];
- (3) 一条直角边的长度和一个锐角的大小[图 1.7(c)];

(4) 斜边的长度和一个锐角的大小[图 1.7(d)].

假设我们想要知道这个三角形的所有边的边长. 对于图(a)和图(b)中的情形, 我们只要用代数学和几何学就够了. 然而, 对于图(c)和图(d)中的情形, 代数表达式(一般而言)并不够. 这两种情形将引导我们走向三角函数(见第 2 章).

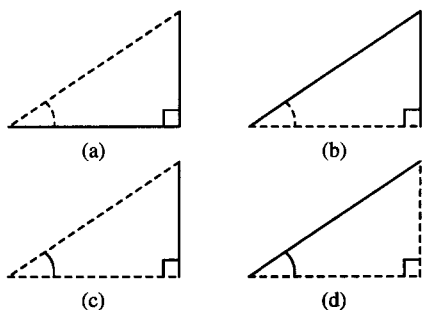


图 1.7

1.3 勾股定理

我们先来看看几何学中最重要工具, 它可以帮我们解决上面所说的图 1.7(a)和(b)中的情形. 这个工具就是著名的勾股定理(也叫作毕达哥拉斯定理). 我们可以把勾股定理分解成以下两个断言:

断言一 如果一个直角三角形的两条直角边边长分别是 a 和 b , 而它的斜边边长是 c , 那么 $a^2 + b^2 = c^2$.

断言二 如果三个正数 a, b 和 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么以它们为边长的三角形, 其边长为 c 的边所对的角是直角.^①

这两个断言是互逆的. 它们看上去差不多, 但仔细读

① 事实上, 我们可以陈述一个比断言二更强的断言:

新断言二 若正数 a, b 和 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么存在一个三角形, 其边长分别为 a, b 和 c , 且这个三角形中边长为 c 的边所正对的角是直角.

这个断言蕴含了如下事实: 若 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么 $a + b > c$.

一读就会发现它们陈述了关于三角形的完全不同的性质. 在断言一中, 已知的是三角形中一个角的信息(即它是一个直角), 然后我们能推断出的是它的边长满足某个特定的关系. 在断言二中, 已知的是三角形的边的信息, 然后我们推断出的是关于角的信息(即其中一个角是直角).

在给定两条直角边或者给定斜边以及一条直角边时, 勾股定理可以让我们复原出三角形. 这是因为通过给定的信息, 我们可以把该三角形所有三条边的边长都求出来. 从几何学我们知道, 这样就把三角形完全确定下来了.

例 1.10 在英国的大学城牛津, 有时候会有草坪铺满两条路相交处附近的长方形土地, 如图 1.8 所示.

此时, 教授们(以及小动物们)可以穿过草坪, 而学生们则必须从路上绕过去. 如果草坪的大小如图 1.8 所示的那样, 问: 在从 A 点走到 B 点时, 学生们要比教授们多走多远的路?

解 三角形 ABC 是一个直角三角形, 所以可以应用勾股定理的断言一:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 = 225. \end{aligned}$$

故 $AB = 15$ 米, 这是教授们所走路线的长度.

另一方面, 学生们所走路线的长度是 $AC + CB = 12 + 9 = 21$ (米). 这比教授们走的路多 6 米, 也就是长 40%.

例 1.11 证明: 边长分别为 3, 4 和 5 的三角形是一个直角三角形.

证明 我们可以应用断言二来检验它是否为直角三角形. 事实上, $5^2 = 25 = 3^2 + 4^2$, 故长度为 5 的那条边所对的角是一个直角. 注意, 我们不能应用勾股定理的断言一来解决这个问题.

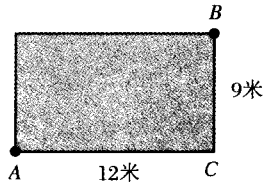


图 1.8



练习

下面的习题与勾股定理有关. 在解答每个问题时, 你

要知道你用的是该定理的哪个断言.

1. 一个直角三角形的两条直角边长度分别是 10 和 24 个单位. 求它的斜边长度是多少个单位.

2. 一个直角三角形的斜边长度是 41 个单位, 它的一条直角边的边长是 9 个单位. 求另一条直角边的长度是多少个单位.

3. 证明边长分别为 5, 12 和 13 的三角形是一个直角三角形.

4. 一个直角三角形的一条直角边长度是 1 个单位, 其斜边长度是 3 个单位. 问: 它的另一条直角边有多长?

5. 等腰直角三角形的斜边长度是 1. 求该三角形的一条直角边的长度.

6. 在有一个 30° 角的直角三角形中, 斜边的长度为 1. 求另外两条边的长度.

(提示: 看一下本章 1.5 节脚注里的图.)

7. 在平面上给定两个点 A 和 B , 描述所有满足条件 $AX^2 + BX^2 = AB^2$ 的点 X 的集合.

(答案: 圆心位于 AB 中点的一个圆.)

8. 在平面上给定两个点 A 和 B , 描述所有使得 $AX^2 - BX^2$ 为常数的点 X 的集合.

1.4 我们在直角三角形家族中最要好的朋友们

有些直角三角形有一个让人非常愉快的性质: 它们的边长都是整数. 我们已经碰到过它们之中最好的那个 (因为它的边长都是很小的整数): 边长分别为 3 个单位、4 个单位和 5 个单位的三角形. 但确实还有很多其他的这种直角三角形.



练习

1. 证明边长分别为 6, 8 和 10 的三角形是直角三角形.

2. 仔细看一下 1.3 节的练习题. 这些练习题中出现了另外三个边长都是整数的直角三角形, 把它们列出来. (在第 8 章里, 我们将会发现一种可以找出很多这种直角三角形的方法.)

3. 一个直角三角形的两条直角边分别是 8 个单位和 15 个单位. 求它的斜边的长度.

4. 我们已经用过具有如表 1.1 所示边长的直角三角形.

表 1.1

直角边	直角边	斜边
3	4	5
6	8	10
9	12	15

继续这个规律, 再找出三个具有整数边长的直角三角形.

5. 我们已经看到边长分别为 5, 12 和 13 的三角形是一个直角三角形. 你能否找到一个边长都是整数的直角三角形, 其最短边边长是 10? 最短边边长要求为 15 时, 又如何?

6. 受第 4 题和第 5 题的启发, 我们可以从一个各边边长都是整数的直角三角形出发, 通过把每条边长都乘以一个相同的整数来得到另一个各边边长都是整数的直角三角形 (因为新的三角形相似于旧的三角形, 所以它仍然是一个直角三角形). 我们也可以把这个过程倒过来, 把每条边的边长都除以同一个整数. 虽然算出来的并不一定是整数, 但我们总能得到有理数. 证明: 三边边长分别是 $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ 和 1 的三角形是一个直角三角形.

7. 应用第 6 题的方法, 从一个边长分别是 3, 4, 5 的三角形开始, 找出一个边长都是有理数的直角三角形, 使得其较短直角边边长是 1. 再找出一个较长直角边边长是 1 的直角三角形.

8. 从一个边长分别是 5, 12, 13 的直角三角形开始, 找出一个边长都是有理数的直角三角形, 使得其斜边边长是 1. 然后找一个较短直角边边长是 1 的直角三角形. 最后再找一个较长直角边边长是 1 的直角三角形.

9. 注意三边边长分别是 5, 12, 13 和 9, 12, 15 的两个直角三角形, 它们都有一条长度为 12 的直角边. 利用这个事实, 求出三边边长分别是 13, 14 和 15 的三角形的面积.

10. (1) 求三边边长分别是 25, 39 和 56 的三角形的面积;

(2) 求三边边长分别是 25, 39 和 16 的三角形的面积.

1.5 我们在直角三角形家族中第二要好的朋友们

在 1.4 节中, 我们仔细研究了三边边长都是整数的直角三角形. 下面我们再看看三个角都很好的三角形. 例如, 直角三角形中的两个锐角可能会相等. 此时这个三角形是等腰的, 而它的每个锐角都是 45° . 或者, 我们也可以让一个锐角是另一个锐角的两倍. 此时这个三角形的两个锐角分别是 30° 和 60° .

但都不完美. 事实上, 角度很好的三角形, 它的边长一定不是很好. 比如, 在 45° 直角三角形 (图 1.9) 中, 我们有两条长度相等的直角边, 以及一条长一点的斜边.

如果我们假设两条直角边都是 1 个单位, 那么用一个单位去测量时, 斜边的边长大约是 1.414213562373 个单位, 这不是一个很漂亮的数字.

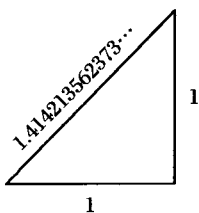


图 1.9

对于一个有 30° 角的直角三角形,若其较短的直角边边长是 1,那么斜边边长是一个很好的数字^①:2.但是,较长的直角边,其长度就不太好了,大约是 1.732[你可以这样来记住这个数:它正好是乔治·华盛顿(George Washington)的出生年份,也是作曲家约瑟夫·海顿(Joseph Haydn)的出生年份].

同样地,边长很好的三角形,其角度也一定不是很好.

如果想要对某条定理或者定义找一个例子,我们可以首先把这些陈述用到我们喜欢的例子.



练习

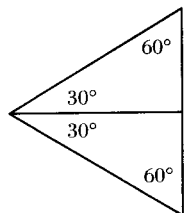
1. 求斜边边长是 1 的等腰直角三角形的直角边的边长.挑战:不使用计算器(但可以使用上文中包含的信息),将边长精确到小数点后 9 位数字.

2. 利用勾股定理,求直角边边长为 3 的等腰直角三角形的斜边长度.

3. 三个角分别是 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的三角形,其较短直角边的边长是 5 个单位.利用勾股定理(以及上文中提到的关于角分别是 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 三角形的性质),求该三角形另外两条边的边长.

4. 对于图 1.10 中的每个三角形,求 x 和 y 的值.

① 你要是不记得怎么证明的话,就取两个这样的三角形,把它们背靠背放在一起:



你会发现,它们正好形成一个等边三角形. 30° 角所正对的那条边是这个等边三角形边长的一半,从而也就是斜边边长的一半.

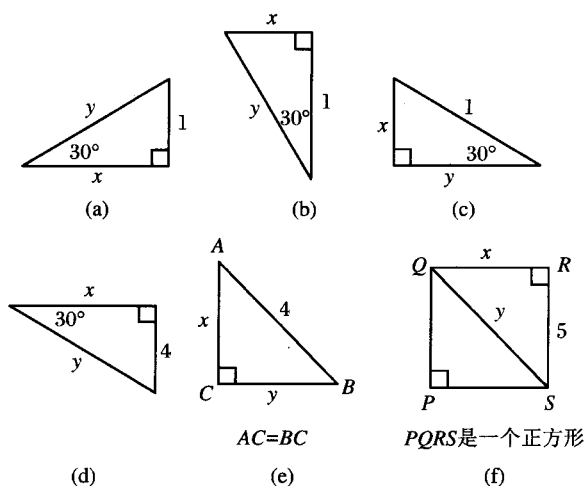


图 1.10

1.6 一些标准的记号

任何一个三角形都有六个要素(“元件”):三条边和三个角.我们总是使用大写字母或者小写希腊字母来表示三角形角的大小,这些字母与用以标示这些角的顶点的字母一致.我们使用小写字母来表示三角形边的长度,这些代表边长的小写字母与用以标示该边所正对的角的大写字母一致.

下面是一些例子,如图 1.11 所示.

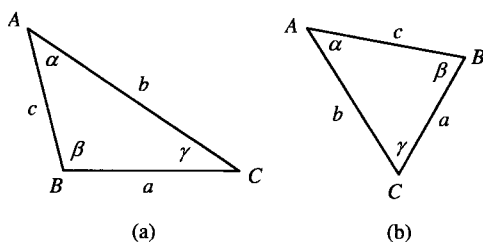


图 1.11

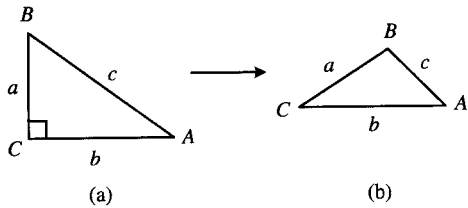
附录

附录 1 分类三角形

因为任何一个三角形的三个角加起来都是 180° ，所以把三角形分成锐角三角形(三个角都是锐角)、直角三角形(有一个角是直角)和钝角三角形(有一个角是钝角)三类. 从几何学我们知道，一个三角形的三边边长决定了它的三个角的大小. 那么我们怎样通过三边边长来确定该三角形到底是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形呢？

勾股定理的断言二给出部分回答：若三边边长 a, b, c 满足关系 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么该三角形是一个直角三角形. 但若这个关系不成立，会怎样呢？

实际上，如果我们把直角三角形视为一个两条直角边在直角处被用铰链连在一起而斜边可以拉伸(假想它是由橡胶制成的)的物体，那我们就可以知道更多. 附图 1.1 展示了这样一个三角形：边 a 和 b 长度固定，而它们之间的角是“用铰链连在一起”的.



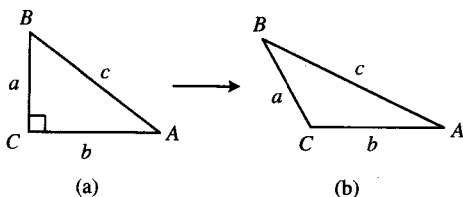
附图 1.1

从附图 1.1(b) 可以看到，如果我们从一个直角三角形开始，慢慢“合上”这个铰链，那么直角就会变成锐角. 此时，第三条边(标记为 c 的边)变短了. 在直角三角形中有 $c^2 = a^2 + b^2$ ，所以我们马上知道：

断言三 如果 $\triangle ABC$ 中的角 C 是锐角，那么 $c^2 < a^2 + b^2$.

类似地，如附图 1.2 所示，如果我们“打开”这个铰

链,角 C 变成了钝角,第三条边则变长了.



附图 1.2

于是我们发现:

断言四 如果 $\triangle ABC$ 中的角 C 是钝角,那么 $c^2 > a^2 + b^2$.



练习

写出断言三和断言四的逆命题.

虽然大部分命题的逆命题都需要一个独立的证明,但对于上述这个特殊情形,逆命题可以直接由原命题推出.比如,如果在 $\triangle ABC$ 中, $c^2 < a^2 + b^2$,那么角 C 既不可能是直角(否则与勾股定理的断言二相矛盾),也不可能是钝角(否则与上述断言四相矛盾).所以角 C 只能是锐角,这恰好就是断言三的逆命题.

断言三、断言四同它们的逆命题一起,可以让我们仅从三角形三条边的边长出发,就能确定该三角形到底是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形.

下面是一些例子:

附例 1.1 边长分别为 2,3 和 4 的三角形是锐角、直角还是钝角三角形?

解 因为 $4^2 = 16 > 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$,所以该三角形是钝角三角形,其钝角是边长为 4 的边所对的角.

(思考:为什么我们不必比较 3^2 与 $2^2 + 4^2$? 或者 2^2 与 $3^2 + 4^2$?)

附例 1.2 边长分别为 4,5 和 6 的三角形是锐角、直角还是钝角三角形?

解 我们只要比较 6^2 与 $4^2 + 5^2$ 的大小关系即可.因为 $6^2 = 36 < 4^2 + 5^2 = 41$,所以该三角形是锐角三角形.

附例 1.3 边长分别为 1, 2 和 3 的三角形是锐角、直角还是钝角三角形?

解 我们发现 $3^2 = 9 > 1^2 + 2^2 = 5$, 所以该三角形是钝角三角形.

(思考: 这个结论不对. 为什么?)



练习

若一个三角形的三条边边长分别由下面各组数给出, 试判断该三角形是锐角、直角还是钝角三角形.

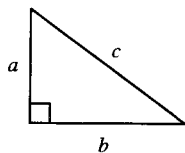
- (1) {6, 7, 8};
- (2) {6, 8, 10};
- (3) {6, 8, 9};
- (4) {6, 8, 11};
- (5) {5, 12, 12};
- (6) {5, 12, 14};
- (7) {5, 12, 17}.

附录 2 勾股定理的证明

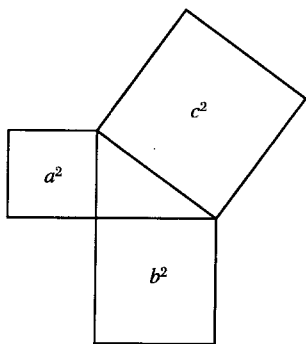
这个经典定理有着很多种不同的证明. 我们的证明延续了古希腊的传统, 即长度的平方总被解释成面积. 让我们先回忆一下正文中的断言一: 如果一个直角三角形的两条直角边边长分别是 a 和 b , 而它的斜边边长是 c . 那么 $a^2 + b^2 = c^2$.

让我们先从任意一个直角三角形开始. 如附图 1.3 所示, 两条直角边边长分别是 a 和 b , 而斜边长度是 c :

如附图 1.4 所示, 我们从这个三角形的每条边向三角形外作一个正方形:

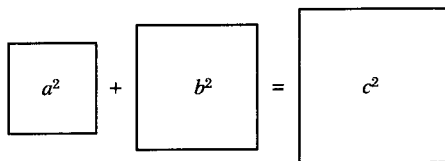


附图 1.3



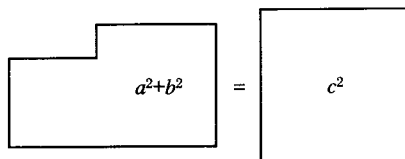
附图 1.4

我们需要证明两个小正方形的面积之和等于大正方形的面积(附图 1.5):



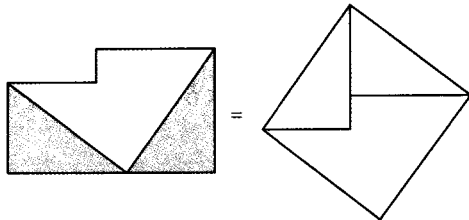
附图 1.5

也就是(附图 1.6):



附图 1.6

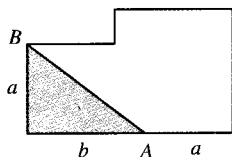
附图 1.7 是整个证明中最精髓的一步. 若我们从左图中切下两个与原三角形一模一样的三角形, 再将它们粘贴到合适的位置, 我们就得到一个边长为 c 的正方形:



附图 1.7

接下来我们补上证明的细节.

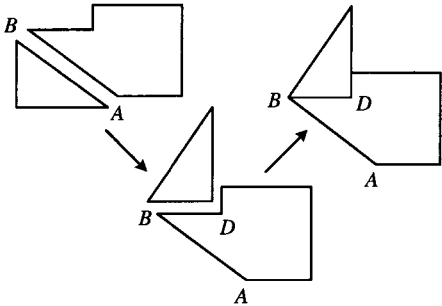
我们从一个由两个正方形并排放在一起而形成的形状古怪的六边形开始. 为了得到附图 1.8 阴影部分所示的三角形, 我们把一条长度为 b 的线段平放在底边上, 并让其起点位于左下角处. 然后我们再沿着对角方向作一条直线. 这样就在该六边形的左下角隔出了一个与原三角形形状一样的三角形. (注意: 该六边形底边剩下的线段长度是 a , 因为整条底边的长度是 $a + b$.)



附图 1.8

三角形 ABC 与我们一开始的三角形是全等的, 因为它们有着相同的两条边以及相同的直角. 因此斜边 AB 的长度是 c .

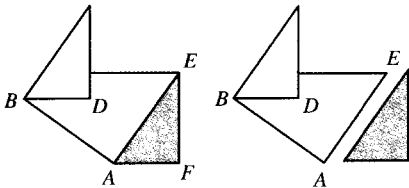
接下来我们把这与原三角形一样的三角形切下来，然后把它放到恰当位置，如附图 1.9 所示。



附图 1.9

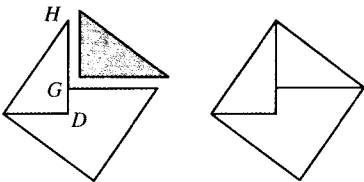
这个三角形中的直角正好可以嵌到六边形外沿的直角(即 D)处，而且该三角形中长度为 a 的直角边与六边形上的线段 BD 吻合，因为后者的长度正好也是 a 。

把 A 和 E 连接起来，我们可以得到另一个与原三角形全等的三角形(附图 1.10)，因为我们已经知道了 $AF = a$ ，而 $EF = b$ 的原因是它是原来正方形的边：



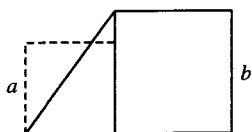
附图 1.10

这个新切出来的三角形与图中右上角的缺口正好吻合，如附图 1.11 所示。

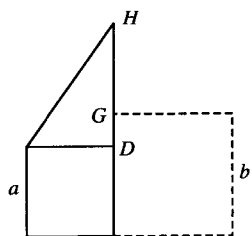


附图 1.11

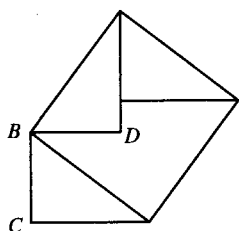
为什么正好吻合？因为长度为 b 的直角边，等于六边形最上面那条边的长度。而点 G 处的直角必然也是吻合的。但为什么 GH 与三角形的另一条直角边，即长度为



附图 1.12



附图 1.13



附图 1.14

a 的那条边,正好一样长呢?让我们再仔细看一下一开始那个三角形.若我们当时是把它贴着边长为 b 的正方形放置的,那么它看上去应该如附图 1.12 所示.

但我们实际上是把它移动到了小正方形的上方,也就是说,如附图 1.13 所示,我们把它向上“推”了一段距离,其长度等于小正方形的边长,即 a .

所以该三角形最终“伸出”点 G 部分的长度必然也等于 a .这就是 GH 的长度,所以它必须与第二个三角形中的短直角边相吻合.

还剩下最后一点:为什么最后的图形是一个正方形?当然,它有四条边,这些边的长度都等于 c .但为什么它所有的角都是直角呢?

如附图 1.14 所示,让我们看看顶点 B .角 CBD 原本就是一个直角(因为它是小正方形的一个角).当切下三角形时,我们从这个角中取走了一部分;但当我们把这个三角形放到上面时,取走的那部分角与原来剩下的那部分角又贴到了一起,只是位置调换了.所以新的角,即我们最终图形中的那个角,依然是个直角.同理可知,最终图形中所有的角都是直角.所以它必然是正方形.

于是,这个“拼图”中的各块都完美地吻合在了一起,而我们也就把由边长分别为 a 和 b 的两个正方形所组成的图形变成了一个边长为 c 的正方形.因为我们并没有改变整个图形的面积,所以 $a^2 + b^2 = c^2$ 这个式子必然是正确的.

最后,证明正文中的断言二:若正数 a, b 和 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$,那么以它们为边长的三角形,其长度 c 的边正对的角是直角.我们分两步证明这个断言.首先证明数 a, b 和 c 确实是某个三角形的边长,然后证明这样造出来的三角形是一个直角三角形.

从几何学中我们知道,三个数是三角形的三条边边长,当且仅当这三个数中较小的两个数之和大于最大的那个数.那么能否知道我们的数中,哪个最大呢?能够知道,只要我们还记得对于正数而言, $p^2 > q^2$ 蕴含了 $p > q$.因为 $c^2 = a^2 + b^2$,而 $b^2 > 0$,所以 $c^2 > a^2$,从而得出 $c > a$.同理我们可以知道 $c > b$.

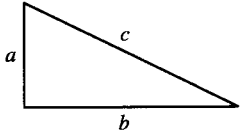
所以,我们现在需要证明 $a + b > c$.再次通过这些数

的平方来判断.我们发现 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2 = c^2$ (因为 $2ab$ 是一个正数).所以 $a + b > c$,从而长度分别为 a, b 和 c 的线段是可以形成一个三角形的.

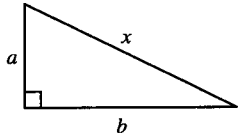
那它是什么类型的三角形呢? 让我们画一个图,如附图 1.15 所示.

这个三角形中是否有一个直角? 我们可以通过把它的一部分复制到一个新三角形中,来测一下它是否有直角.让我们作一个新三角形,如附图 1.16 所示,其两条边长分别为 a 和 b ,且这两条边的夹角为直角.

那么这个新三角形的斜边有多长呢? 设它的长度为 x ,那么根据勾股定理的断言一(这是我们已经证明),有 $x^2 = a^2 + b^2$.这就意味着 $x^2 = c^2$,即 $x = c$.于是我们发现这个新三角形与原来那个三角形的三条边边长都一样,从而它们是全等的.所以原来那个三角形中边长为 a 和 b 的边所夹的角必然是直角,而这正是我们想要证明的.



附图 1.15



附图 1.16

第 2 章

三角形中的三角比

2.1 $\sin \alpha$ 的定义

定义:对于任意锐角 α , 我们作一个含有角 α 的直角三角形. 角 α 的正弦, 简记为 $\sin \alpha$, 等于这个角的对边边长与该三角形斜边边长的比值.

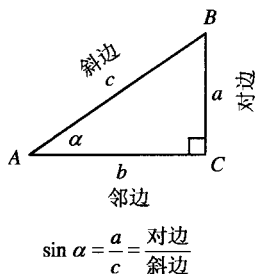


图 2.1

比如, 在直角三角形 ABC 中(图 2.1), $\sin \alpha = \frac{a}{c}$. 我

们马上可以看到这个定义的缺点: 它没有告诉我们到底作多大的三角形. 有很多含有角 α 的直角三角形, 有的大, 有的小.

让我们先试着做做下列问题:

例 2.1 求 $\sin 30^\circ$.

解法 1 从表面上看, 解这个问题似乎无从下手, 因为我们只知道角的大小, 而没有一个包含这个角的直角三角形.

解法 2 作一个含有 30° 角的直角三角形(图 2.2):

比如, 我们可以让斜边的长度等于 20. 则 30° 角正对的那条边, 其长度是 10. 所以

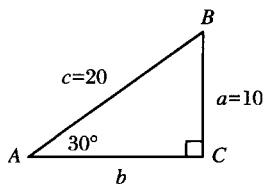


图 2.2

$$\sin 30^\circ = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

我们从几何学可以知道, 无论斜边的边长值是多少, 30° 角所正对的那条边的长度值一定是斜边长的一半^①, 所以

^① 几何学的一个定理告诉我们, 在含有 30° 角的直角三角形中, 这个角的对边长度恰好等于斜边长度的一半(参见 1.5 节的脚注).

$\sin 30^\circ$ 总是等于 $\frac{1}{2}$.这个值只依赖于角度的大小,而不依赖于我们所使用的特定的三角形的边长.

例 2.2 一个美国学生给她的一個法国朋友写了封电子邮件,因为她们在做同样的题目.美国学生给法国学生的电子邮件里写道:“看一看 Gelfand 和 Saul 写的《三角函数》这本书中第 2 章 2.1 节的例 2.2.我们来算算角 D 的正弦是多少吧.”如图 2.3 所示.

这位法国学生用她的尺子量了量 EF 的长度,又量了量 ED 的长度,然后算了一下比值 EF/ED ,并把答案发给了她的美国朋友.过了几天,她在半夜的时候突然想到:“哎呀,真该死!我忘记了美国人量长度时是以英寸为单位,而我们用的是厘米.我得告诉我的朋友,我给她的答案是错误的!”这位法国学生该怎么修改她的答案呢?

解 她根本不用做任何修改——答案是正确的.一个角的正弦是两个长度的比值,该比值不依赖于测量时所用的单位.也就是说,如果用厘米作单位时,一条线段是另一条的两倍长,那么改用英寸作单位时,它还是另一条的两倍长.

一般而言,对于任意角 α (其中 $0 < \alpha < 90^\circ$), $\sin \alpha$ 的值只依赖于 α ,而与含 α 的直角三角形无关.^①这件事情是对的,因为任意两个含锐角 α 的直角三角形都是相似的,所以它们对应边的比是一样的. $\sin \alpha$ 只是这些相同比值的一个名字而已.

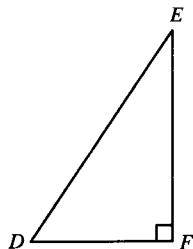


图 2.3



练习

1. 对于图 2.4 中的每幅图, $\sin \alpha$ 的值分别是多少?
2. 对于图 2.4 中的每幅图, $\sin \beta$ 的值分别是多少?

① 例 2.1 说明了 $\sin \alpha$ 的值不依赖于含有 α 的特定三角形. 例 2.2 说明了 $\sin \alpha$ 的值不依赖于测量该三角形边长时所用的单位.事实上,我们还可以更仔细地考察一下例 2.1.为了算出 $\sin 30^\circ$ 的值,我们需要三个信息:(a) 这个角度;(b) 含有这个角的直角三角形;(c) 测量这个三角形边长时用的单位.我们已经看到, $\sin \alpha$ 的值事实上不依赖于后面两个信息.

3. 在下面这行数字中,划掉所有小于 60° 的正弦值的数. 然后用计算器验证你的结论.

0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9

(提示:回想一下角分别是 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的三角形中各边边长之间的关系.)

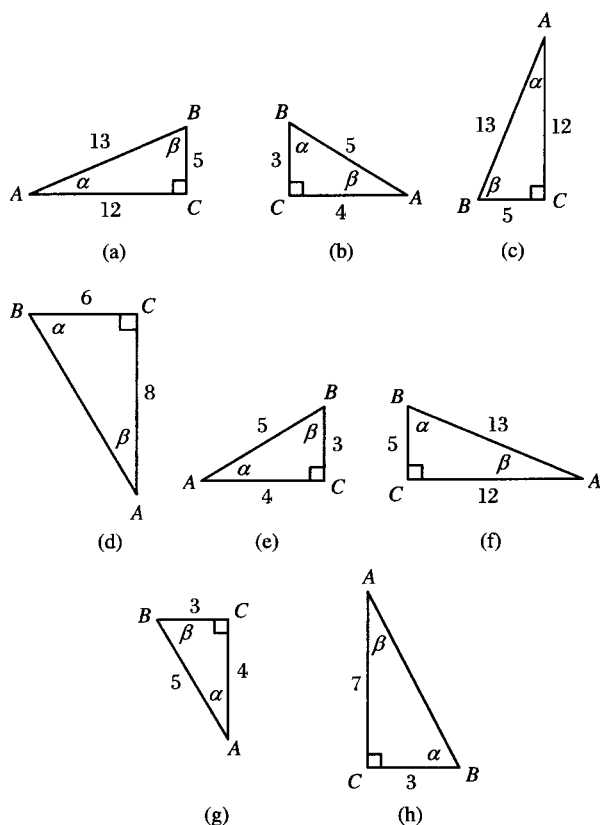


图 2.4

2.2 计算隐藏的正弦

有时候一个角的正弦隐藏在图中,不易被发现. 下面的习题可用于练习找出等于给定角的正弦的比,此外从中还可以导出一些有意思的公式.



练习

1. 图 2.5 是一个直角三角形, 其斜边上的高已作出. 小写字母代表相应线段的长度.

- (1) 找出等于 $\sin \alpha$ 的两条线段长度之比;
- (2) 找出等于 $\sin \alpha$ 的另一组两条线段长度之比;
- (3) 找出等于 $\sin \alpha$ 的第三组两条线段长度之比.

2. 图 2.6 中三角形 ABC 的三个角都是锐角(特别地, 它们都不是直角), 而 CD 是边 AB 上的高. 我们记 $CD = h$, $CA = b$.

- (1) 找出等于 $\sin \alpha$ 的长度比;
- (2) 用 $\sin \alpha$ 和 b 表示 h ;
- (3) 我们知道三角形 ABC 的面积是 $hc/2$. 用 b, c 和 $\sin \alpha$ 表示这个面积;
- (4) 用 a, c 和 $\sin \beta$ 表示三角形 ABC 的面积;
- (5) 用 c 和 $\sin \beta$ 表示从点 A 到 BC 边上的高的长度.(也许你需要作一个带有 BC 边上的高的新图)

3. (1) 根据图 2.6, 写出 h 的两个表达式: 其中之一用的是边 b 和 $\sin \alpha$, 另一个用的是边 a 和 $\sin \beta$.

(2) 根据第(1)部分的结果, 证明 $a \sin \beta = b \sin \alpha$.

(3) 根据第 2 题的第(5)部分的结果, 证明 $c \sin \beta = b \sin \gamma$.

(4) 证明

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

这个关系叫作**正弦定律**, 它对任意锐角三角形都成立(事实上, 我们还将看到, 它对任意钝角三角形也成立).

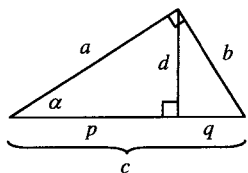


图 2.5

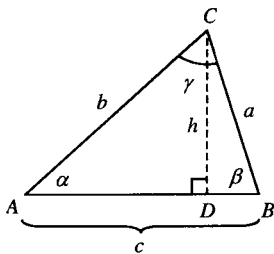
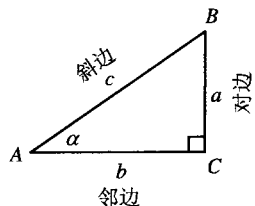


图 2.6



$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$$

图 2.7

2.3 余弦比

定义: 在含有锐角 α 的直角三角形中(图 2.7), 与角 α 相邻的直角边边长与斜边边长之比被称为角 α 的余弦,

简记为 $\cos \alpha$.

注意与 $\sin \alpha$ 一样, $\cos \alpha$ 的值只依赖于 α , 而与含有角 α 的直角三角形无关. 任何两个这样的三角形都是相似的, 所以在每一个三角形中, $\cos \alpha$ 的值是一样的.

练习

1. 本章 2.1 节练习第 1 题中有七个三角形的图, 求每个图中角 α 和角 β 的余弦.

2. 对于图 2.8 中的每个三角形, 求角 α 和角 β 的余弦.

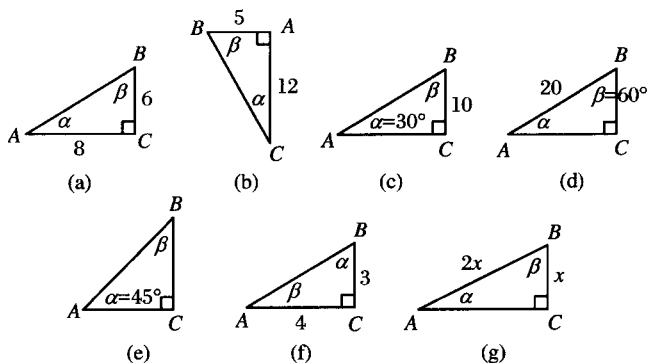


图 2.8

3. 图 2.9 是一个直角三角形, 其斜边上的高已作出. 小写字母代表相应线段的长度.

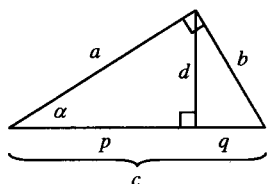


图 2.9

- (1) 找出等于 $\cos \alpha$ 的两条线段长度之比;
- (2) 找出等于 $\cos \alpha$ 的另一组两条线段长度之比;
- (3) 找出等于 $\cos \alpha$ 的第三组两条线段长度之比.

2.4 正弦与余弦之间的一个关系

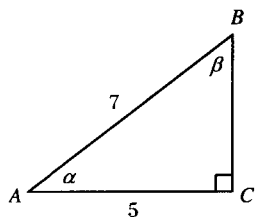


图 2.10

例 2.3 在图 2.10 中, $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. 问: $\sin \beta$ 的值是多少?

解 根据正弦比的定义, 有

$$\sin \beta = \frac{AC}{AB}.$$

这个比的值是 $\frac{5}{7}$,跟 $\cos \alpha$ 的值一样.

这是一个巧合吗?当然不是.若 α 和 β 是同一个直角三角形中的两个锐角,则无论这个三角形的三边边长分别是多少,都有 $\sin \alpha = \cos \beta$.我们把这个事实叙述成一个定理.

定理 若 $\alpha + \beta = 90^\circ$,则 $\sin \alpha = \cos \beta$,且 $\cos \alpha = \sin \beta$.



练习

1. 证明 $\sin 29^\circ = \cos 61^\circ$.
2. 若 $\sin 35^\circ = \cos x^\circ$,那么 x 的数值可以是多少呢?
3. 证明:我们可以把上面的定理改写成 $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

2.5 一些记号

如果我们不够细心的话,对某些记号就会产生歧义.比如, $\sin x^2$ 是什么意思?我们是先计算角的平方,然后再求正弦,还是先计算 $\sin x$,然后再把所得的数平方?前者是很少见的:为什么需要一个角度的平方?在计算这样一个量的时候,它的单位应该是什么?

后者则是经常会发生的.在下文中,我们约定用 $\sin^2 x$ 表示 $(\sin x)^2$,也就是先计算角的正弦,然后对结果进行平方.比如, $\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$.



练习

在图 2.11 中,算出以下表达式的数值.

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $\sin^2 \alpha$; | (2) $\cos^2 \alpha$; |
| (3) $\sin^2 \beta$; | (4) $\cos^2 \beta$; |
| (5) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; | (6) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$; |
| (7) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta$. | |

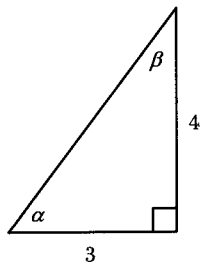


图 2.11

2.6 正弦与余弦之间的另一个关系式

如果仔细观察上一节的练习题,你会发现下述定理的实例:

定理 对于任意锐角 α , 都有 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

证明 和前面一样, 我们作一个含有角 α 的直角三角形, 如图 2.12 所示.

假设两条直角边的长度分别为 a 和 b , 而斜边的长度为 c , 则

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

但勾股定理告诉我们 $a^2 + b^2 = c^2$, 所以上面最后一个分式的值等于 1; 也就是说, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

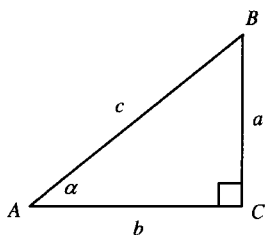


图 2.12



练习

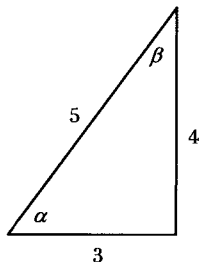


图 2.13

1. 对于图 2.13 中的角 α , 验证 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
2. 你有没有注意到图 2.13 中没有标出直角? 第 1 题是否错误?
3. 对于图 2.13 中的另一个角 β , 验证 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.
4. 若 α 是一个锐角, 且 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, 求 $\cos \alpha$ 的值.
5. 若 α 是一个锐角, 且 $\sin \alpha = \frac{5}{7}$, 求 $\cos \alpha$ 的值.
6. 若 α 和 β 是同一个直角三角形中的锐角, 求证 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$.
7. 若 α 和 β 是同一个直角三角形中的锐角, 求证 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

2.7 我们第二要好的朋友们(和正弦比)

一般而言, 给出一个角的大小, 算出它的正弦值并不

很容易.但对于特殊的三角形,这件事情并不很难.我们已经发现 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

例 2.4 求 $\cos 30^\circ$.

解 为了能够使用角的余弦定义,我们需要作一个含有 30° 角的直角三角形(图 2.14),而这个三角形是我们已经熟知的老朋友了.

我们知道 $\cos 30^\circ$ 的值只依赖于这个三角形的形状,而不依赖于其边长的值.所以我们可以假定短的直角边长度为 1.那么另外两条边的长度就如图 2.14 所示,于是我们得出了 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

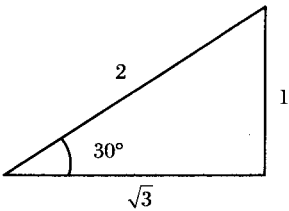


图 2.14

例 2.5 证明 $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.

证明 在例 2.4 所作的角分别是 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的三角形中,一个锐角是 30° ,而另一个锐角是 60° .站在 30° 角的顶点处,我们可以看到对边长度是 1,而斜边长度是 2.于是 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.但如果我们走到 60° 角的顶点处,刚才的对边就变成了邻边,于是我们发现刚才用于计算 $\sin 30^\circ$ 的比正好也是计算 $\cos 60^\circ$ 的比.

练习

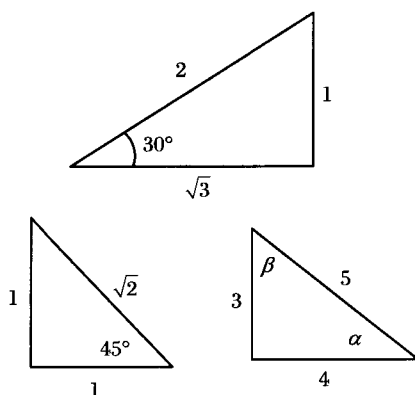
1. 填表 2.1. 你可能需要使用图 2.15 中作出的范例三角形.

表 2.1

x	$\sin x$	$\cos x$
30°		
45°		
60°		
α		
β		

- 验证 $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$.
- 验证 $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$.

4. 记边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形中较小的锐角角度为 α . 看一看 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值. 猜一猜 α 的值. 它是大于还是小于 30° ? 与 45° 比呢? 与 60° 比呢?



(角 α 和 β 是边长分别为 3, 4, 5 的直角三角形中的角.)

图 2.15

2.8 $\sin 90^\circ$ 的值是多少?

迄今为止, 我们还没有回答标题中的问题, 因为只对锐角定义了 $\sin \alpha$. 但我们还是有一个合理的方式来定义 $\sin 90^\circ$. 图 2.16 展示了一系列具有相同斜边长度的直角三角形, 其锐角 α 一直在改变.

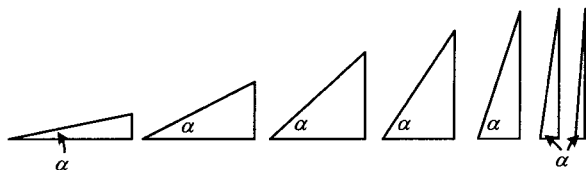


图 2.16

当角度 α 越来越大时, 对边与斜边的比越来越接近于 1. 所以我们给出如下的定义.

定义 $\sin 90^\circ = 1$.

图 2.16 还显示了关于 $\sin \alpha$ 的其他性质. 记住直角三角形的斜边总是比任意一条直角边要长. 因为 $\sin \alpha$ 是

直角三角形中一条直角边与斜边的长度比, $\sin \alpha$ 永远不可能比 1 大. 所以要是有人告诉你, 有一个角 α , 它的正弦值 $\sin \alpha = 1.2$, 或者即使是 1.01, 你都可以立刻告诉他或者她, 这个肯定错了.

同一系列三角形也可以让我们定义 $\cos 90^\circ$. 当角 α 越来越接近于 90° 时, 斜边保持同样长度不变, 而相邻的直角边则变得越来越短. 所以从该系列图形出发, 我们得到下面这个定义.

定义 $\cos 90^\circ = 0$.



练习

1. 怎样从图 2.16 出发, 可以让我们定义 $\sin 0^\circ = 0$?
2. 从图 2.16 出发, 我们还可以定义出 $\cos 0^\circ$ 为多少?
(答案: $\cos 0^\circ = 1$.)
3. 用我们的新定义验证 $\sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ = 1$.
4. 用我们的新定义验证 $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1$.

5. 你的朋友告诉你他在算一个角的余弦, 并且算出来的值是 1.02, 你应该跟他说什么?

2.9 一次探索: 和可以有多大?

我们已经知道表达式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ 的值永远是 1. 现在让我们看看表达式 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值可以是多少呢? 虽然这个问题不是一个简单的问题, 但我们现在可以开始考虑它了.



练习

1. 我们可以从“最熟悉的朋友们”身上得到一些信息. 把表 2.2 中的空格全部填上. (你可以使用计算器)

表 2.2

$\sin 0^\circ + \cos 0^\circ$	$0 + 1$	1
$\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$		
$\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$		
$\sin 60^\circ + \cos 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$	1.366(约等于)
$\sin 90^\circ + \cos 90^\circ$		
$\sin \alpha + \cos \alpha$, 其中 α 是边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形中较小的锐角	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$	1.4
$\sin \alpha + \cos \alpha$, 其中 α 是边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形中较大的锐角		

2. 证明: $\sin \alpha + \cos \alpha$ 恒小于 2.

(提示: 几何学告诉我们 $\sin \alpha \leq 1$ 且 $\cos \alpha \leq 1$. 它们能够同时等于 1 吗?)

3. 证明对于任意锐角 α , 有 $\sin \alpha + \cos \alpha \geq 1$.

[提示: 注意 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$. 想一想为什么这个式子就可以给出我们想要的 inequality.]

4. 当 α 等于多少时, $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$?

5. 从表 2.2 中我们可以看到, $\sin \alpha + \cos \alpha$ 可以取到值 1.4. 它能够取到值 1.5 吗? 我们在后面还会提到这个问题. 就目前而言, 请使用计算器算一算表达式 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值可以有多大.

2.10 又一次的探索: 积可以有多大?

现在我们考虑乘积 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. 它可以有多大呢? 填表 2.3.

你觉得乘积 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 可以有多大? 我们后面还会回到这个问题上来.

表 2.3

$\sin 0^\circ \cdot \cos 0^\circ$	$0 \cdot 1$	0
$\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$		
$\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$		
$\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$		0.43301(约等于)
$\sin 90^\circ \cdot \cos 90^\circ$		
$\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, 其中 α 是边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形中较小的锐角	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$	0.48
$\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, 其中 α 是边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形中较大的锐角		

2.11 更多的比值,更多的三角函数

在直角三角形中,我们有总共六个不同的边长比,每一个比都有一个特殊的名字.

这些比中,有两个我们已经给出了名字:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

下面我们给另外四个也起个名字,其中,前两个非常重要.

比值

$$\frac{\text{角 } \alpha \text{ 的对边}}{\text{角 } \alpha \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b} \quad \boxed{\tan \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}}$$

叫作角 α 的正切,简记为 $\tan \alpha$.

比值

$$\frac{\text{角 } \alpha \text{ 的邻边}}{\text{角 } \alpha \text{ 的对边}} = \frac{b}{a} \quad \boxed{\cot \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}}}$$

叫作角 α 的余切,简记为 $\cot \alpha$.

还有两个比在有些教科书上会出现,但它们在数学上并没有那么重要.为了完整性,我们把它们列在下面,

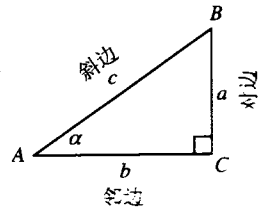


图 2.17

但我们后面不会再用到它们.

比值

$$\frac{\text{斜边}}{\text{角 } \alpha \text{ 的邻边}} = \frac{c}{b} \quad \boxed{\sec \alpha = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}}$$

叫作角 α 的正割, 简记为 $\sec \alpha$.

比值

$$\frac{\text{斜边}}{\text{角 } \alpha \text{ 的对边}} = \frac{c}{a} \quad \boxed{\csc \alpha = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}}}$$

叫作角 α 的余割, 简记为 $\csc \alpha$.

以边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形为例, 如图 2.18 所示. 我们有六个比以及六个不同的名字:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{4}{3},$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}, \quad \sec \alpha = \frac{5}{3}, \quad \csc \alpha = \frac{5}{4}.$$

总结一下, 给定三角形, 如图 2.19 所示, 我们有 (表 2.4):

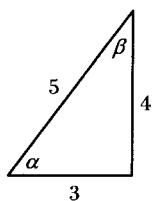


图 2.18

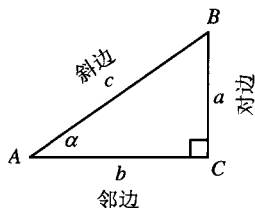


图 2.19

表 2.4

$\sin \alpha$	$\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$	$\frac{a}{c}$
$\cos \alpha$	$\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$	$\frac{b}{c}$
$\tan \alpha$	$\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$	$\frac{a}{b}$
$\cot \alpha$	$\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$	$\frac{b}{a}$
$\sec \alpha$	$\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}$	$\frac{c}{b}$
$\csc \alpha$	$\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}$	$\frac{c}{a}$

与前面一样, 这些比都只依赖于角 α 的大小, 而与我们所使用的特定三角形的边的长度无关, 也与我们怎样测量长度无关. 下面的定理推广了我们关于 $\sin \alpha$ 的相应结论:

定理 1 锐角三角形中三角比的值只依赖于角自身的大小, 而与含有这个角的特定三角形无关.

证明 任意两个含同一个给定锐角的直角三角形都

是相似的, 所以对应边的比相等. 三角比只是这些比的名字而已.



练习

1. 对于图 2.20 中的角, 求 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$.

2. 你有没有假定图 2.20 中的三角形是一个直角三角形? 为什么这个假定是正确的?

3. 根据图 2.21, 用 a , b 和 c 来表示 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$.

4. 对于图 2.22, 求 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$ 的值.

5. 对于图 2.23, 求 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$ 的值.

6. 对于图 2.24 中的每一个比值, 给出两个名字. 作为例子, 第一行已经填好.

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\frac{b}{c} = \quad = \quad$$

$$\frac{a}{b} = \quad = \quad$$

$$\frac{b}{a} = \quad = \quad$$

7. 一个角的正弦是 $\frac{3}{5}$. 它的余弦是多少? 它的余切是多少?

8. 若 $\tan \alpha = 1$, $\cos \alpha$ 是多少? $\cot \alpha$ 是多少?

9. $\tan 45^\circ$ 的值是多少?

10. $\tan 30^\circ$ 的值是多少? 用根式表达这个数. 然后用计算器算出一个近似值.

11. $\tan 45^\circ + \sin 30^\circ$ 的值是多少? 为什么你不需要用计算器来计算它?

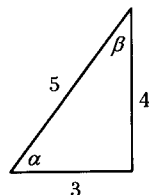


图 2.20

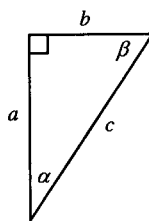


图 2.21

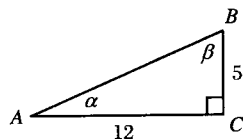


图 2.22

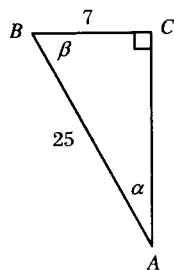


图 2.23

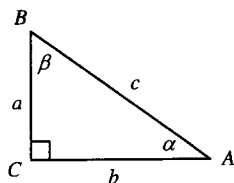


图 2.24

第 3 章

三角比之间的关系

3.1 正弦与它的亲戚们

我们已经学习了四个不同的三角比: 正弦, 余弦, 正切和余切. 它们四个是密切相关的, 而且找出它们之间的关系将会非常有用. 对于任意锐角 α , 我们已经知道 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 下面的例子向我们介绍其他的关系.

例 3.1 若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.

解 分数 $\frac{3}{5}$ 让我们想起了我们的好朋友, 边长分别是 3, 4, 5 的直角三角形, 如图 3.1 所示.

事实上, α 正好是这样一个三角形中的一个角, 即长度为 3 的边的对角 (图 3.1). 既然作出了这个三角形, 我们很容易就能发现 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 以及 $\cot \alpha = \frac{4}{3}$.

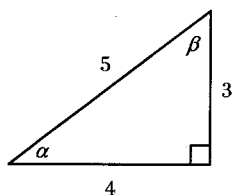


图 3.1

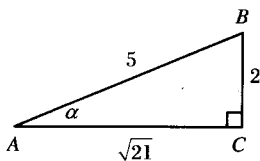


图 3.2

例 3.2 若 $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.

解 我们还是可以作一个含有角 α 的直角三角形, 如图 3.2 所示.

我们知道的只是这个三角形的两条边. 为了求出 $\cos \alpha$, 我们需要第三条边. 而勾股定理可以告诉我们第三条边. 因为 $a^2 + b^2 = c^2$, 我们有 $b^2 + 2^2 = 5^2$, 于是 $b^2 = 21$, 即 $b = \sqrt{21}$. 现在我们知道这个三角形的所有边长, 所以很容易得到

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

例 3.3 我们还可以用另一种方法求解例 3.2. 对于角 α , 我们可以作一个不同的直角三角形, 其斜边为 1, 一条直角边为 $\frac{2}{5}$. 在这种情况下, 请做出相应的计算. 它将给出完全相同的结果.

例 3.4 若 $\sin \alpha = a$, 其中 $0 < a < 1$, 用 a 表示 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.

解 与前面一样, 我们作有一个锐角等于 α 的直角三角形, 如图 3.3 所示.

最简单的作法就是让斜边长度为 1, 而角 α 的对边是 a . 记另一条直角边为 x . 则 $x^2 + a^2 = 1$, 所以 $x = \sqrt{1-a^2}$. 于是我们知道了这个三角形的所有边长, 从而可以很容易得到

$$\cos \alpha = \sqrt{1-a^2}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad \cot \alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

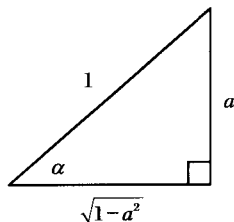


图 3.3



练习

- 假定 $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.
- 假定 $\sin \alpha = \frac{3}{7}$. 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.
- 假定 $\cos \alpha = b$. 用 b 表示 $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$.
- 假定 $\tan \alpha = d$. 用 d 表示 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 和 $\cot \alpha$.
- 填表 3.1. 在每一行中, 有一个三角函数的值已经给出. 请用这个值去表示剩下的三角函数的值. 作为例子, 表格的第一行已经列出.

表 3.1

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha$	a	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\cos \alpha$		a		
$\tan \alpha$			a	
$\cot \alpha$				a

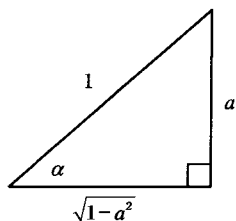


图 3.4

请不要试图背这张表. 填第一行时, 要用的是图 3.4 所示的三角形.

其边长是用勾股定理计算出来的. 对于剩下的各行, 可以使用下述三角形(图 3.5):

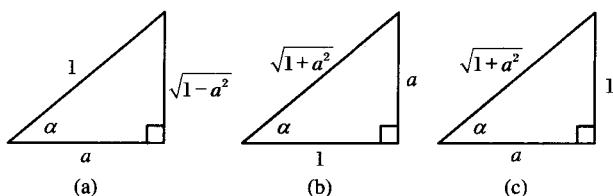


图 3.5

有它们, 就足够了.

注记:我们假定了对于任意位于 0 和 1 之间的数 a , 一定有一个直角三角形, 它含有一个正弦值为 a 的角. 但这个假定从几何上看是显然的: 我们总是可以通过取斜边长度为 1 且一条直角边为 a 而造出这样一个三角形.^①

3.2 代数还是几何?

例 3.5 若 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.

解 我们可以利用几何知识解答这个问题, 即作一个三角形(与 3.1 节练习的第 5 题类似). 我们也可以通过代数知识解答这个问题, 即利用例 3.4. 比如,

① 可能你会有点反对我们取三角形的斜边使其长度等于 1. 如果你坚持这样的话, 我们也可以取斜边长度为 c . 这样我们还是可以得到同样的结果, 只不过计算过程会稍微长一点. 比如, 假定 $\sin \alpha = x$. 取一个含有角 α 的直角三角形, 且该三角形的斜边长度是 c . 假定角 α 的对边长度为 a . 则 $\frac{a}{c} = x$, 因为 $\sin \alpha = x$. 于是 $a = cx$. 如果要算 $\cos \alpha$, 我们可以假定另一条直角边长度为 b . 则 $b^2 = c^2 - a^2 = c^2 - c^2 x^2$, 从而

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - c^2 x^2}}{c} = \frac{c \sqrt{1 - x^2}}{c} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

此外,你有没有注意到 α 是一个我们熟悉的三角形中的一个角?



练习

1. 求 $\sin^2 30^\circ$.

解 因为 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, 可以得到

$$\sin^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

2. 求 $\sin^2 45^\circ$. 用计算器验算一下.

3. 重做 3.1 节的练习第 5 题,但不是用三角比的值而是用三角比的名字来填表 3.2. 作为例子,表格的第一行已经列出.

表 3.2

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$				
$\tan \alpha$				
$\cot \alpha$				

3.3 关于名字的一个注记

我们已经发现,若 α 和 β 互为余角,那么 $\sin \alpha = \cos \beta$. 在历史上,大家用“co-”来表示“余”,因为在同一个直角三角形中的两个锐角互余.

下面的练习把上面这段话拓宽了.



练习

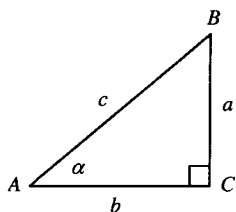


图 3.6

用图 3.6 证明若 α 和 β 互余, 则:

- (1) $\tan \alpha = \cot \beta$;
- (2) $\cot \alpha = \tan \beta$;
- (3) $\sec \alpha = \csc \beta$;
- (4) $\csc \alpha = \sec \beta$.

3.4 恒等式危机?

从 3.2 节最后的表格我们看到, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. 我们也曾经看到对于任意角 α , $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 这样类型的方程, 因为它们对变量的所有值都成立, 所以被称为恒等式.

从已有的恒等式出发, 我们可以导出更多的恒等式. 但请不要紧张, 我们不会出现恒等式危机. 要是你忘记了这些恒等式, 只要用下面这三个基本的恒等式就可以把它们都推导出来:

$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \\ \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha}.\end{aligned}$

从这几个简单的恒等式出发, 我们可以导出很多其他含有同一个角的正弦、余弦、正切和余切的恒等式. 导出新恒等式的方法之一就是作一个含有锐角 α 的直角三角形, 然后把 $\sin \alpha$ 代换成 $\frac{a}{c}$, 把 $\cos \alpha$ 代换成 $\frac{b}{c}$, 如此等等.

例 3.6 证明 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

证明 我们可以作一个直角边长为 a, b , 斜边长为 c 的直角三角形, 使得锐角 α 正对着长度为 a 的直角边. 则有

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan \alpha.$$

另一种证明新恒等式的方法是证明它可以从我们已经知道的其他恒等式导出.

例 3.7 证明恒等式 $\tan \alpha \cot \alpha = 1$.

证明 从前文中我们发现 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 我们也可以

发现 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. 于是

$$\tan \alpha \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

例 3.8 证明 $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

证明 因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 所以

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

即

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

现在, 在下面的题目中练习这两种技巧.



练习

1. 对于 α 等于 30° , 45° 以及 60° , 分别验证 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

2. 一个角的正弦是 $\frac{\sqrt{5}}{4}$. 用根式表示这个角的余弦.

3. 一个角的余弦是 $\frac{2}{3}$. 用根式表示这个角的正弦.

4. 一个角的正切是 $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 求这个角的正弦与余弦的值.

5. 证明下列关于锐角 α 的恒等式:

(1) $\cot \alpha \sin \alpha = \cos \alpha$;

(2) $\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$;

(3) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

(4) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

(5) $\frac{\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$;

$$(6) \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha};$$

$$(7) \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1};$$

$$(8) \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^2;$$

$$(9) \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 1 + \sin \alpha \cos \alpha.$$

6. (1) 对于哪些角 α , 有 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha > \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$?

(2) 对于哪些角 α , 有 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha \geq \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$?

7. 若 $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, 求 $2\sin \alpha \cos \alpha$ 的值.

8. (1) 若 $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, 求 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ 的值.

(2) 若 $\tan \alpha = r$, 写出一个 r 的表达式用以表示 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ 的值.

9. 若 $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, 求 $\frac{\sin \alpha - 2\cos \alpha}{\cos \alpha - 3\sin \alpha}$ 的值.

10. 若 $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, 且 a, b, c, d 是任意满足 $5c + 2d \neq 0$

的有理数, 证明 $\frac{a\sin \alpha + b\cos \alpha}{c\cos \alpha + d\sin \alpha}$ 是一个有理数.

11. 当 α 取什么值时, 表达式 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ 的值达到最大?

3.5 关于正割和余割的恒等式

虽然我们并不常用正割和余割, 但有时候用这两个函数表示上面一些基本的恒等式是比较方便的. 通过使用 $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ 和 $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, 我们总是可以按照我们想要的方式重写结果.

例 3.9 证明对于任意锐角 α , 都有 $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$.

证明 因为

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},$$

所以要证的恒等式等价于

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha.$$

后面这个式子是在例 3.8 中已经证明的.



练习

1. 仅用正弦、余弦、正切或余切改写以下恒等式:

(1) $\tan \alpha \csc \alpha = \sec \alpha$;

(2) $\cot \alpha \sec \alpha = \csc \alpha$;

(3) $\frac{1}{\sec \alpha} \csc \alpha = \cot \alpha$;

(4) $\tan^2 \alpha = (\sec \alpha + 1)(\sec \alpha - 1)$;

(5) $\csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$.

2. 仅用正割和余割, 正切或余切改写. 要求将结果简化至不含分式.

(1) $\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$;

(2) $\frac{1}{\sin \alpha} \cos \alpha = \cot \alpha$;

(3) $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

(4) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$.

3.6 一个引理

我们已经知道: 若 $a = \cos \alpha$ 且 $b = \sin \alpha$, 其中 α 是一个锐角, 那么 $a^2 + b^2 = 1$. 我们也可以证明这个断言的逆命题: 若 a 和 b 是一对满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的正数, 那么存在一个角 θ 使得 $a = \cos \theta$ 且 $b = \sin \theta$. 事实上, 我们如果作一个边长分别为 a , b 和 1 的三角形 (图 3.7), 那么勾股定理 (断言二) 告诉我们这是个直角三角形. 于是我们要寻找的角 θ 便“自动地”出现在这个三角形里了.

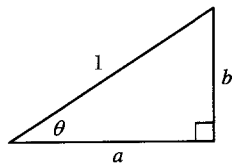


图 3.7



练习

1. 假定 α 是一个小于 45° 的角. 若 $a = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, 而 $b = 2\sin \alpha \cos \alpha$, 证明存在一个角 θ , 使得 $a = \cos \theta$ 且 $b = \sin \theta$.

2. 假定 α 是一个角. 若 $a = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ 且 $b = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, 证明存在一个角 θ , 使得 $a = \cos \theta$ 且 $b = \sin \theta$.

3. 假定 α 是一个角. 若 $a = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ 且 $b = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$, 证明存在一个角 θ , 使得 $a = \cos \theta$ 且 $b = \sin \theta$.

4. 假定 t 是 0 到 1 之间的一个数. 若

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{且} \quad b = \frac{2t}{1 + t^2},$$

证明存在一个角 θ , 使得

$$a = \cos \theta \quad \text{且} \quad b = \sin \theta.$$

5. (一个非三角函数的恒等式) 若 $p^2 + q^2 = 1$, 证明 $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = 1$. 这个结果与上面练习题中哪个三角恒等式类似?

3.7 一些不等式

你应该还记得, 从几何学中我们知道斜边是直角三角形中最长的边(因为它对着的是最大的角). 所以直角三角形中任意一条直角边与斜边的比一定是小于 1 的. 由此可知对于任意锐角 α , 都有 $\sin \alpha < 1$ 和 $\cos \alpha < 1$.

上面这个简单事实就是做下面这些练习时所需要的背景知识.



练习

1. 对于任意锐角 α , 证明 $1 - \sin \alpha \geq 0$. 当 α 是哪些

值时,等号成立?

2. 对于任意锐角 α , 证明 $1 - \cos \alpha \geq 0$. 当 α 是哪些值时, 等号成立?

3. 下述断言中, 哪些对所有 α 都成立?

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

(2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \geq 1$;

(3) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \leq 1$.

(答案: 它们都成立. 你能看出为什么吗?)

4. 有四个超市在进行促销. 哪几个超市对于它们的商品打出的促销条件是一样的?

(1) 在超市 A 中, 所有商品的价格都不超过 1 美元;

(2) 在超市 B 中, 所有商品的价格都小于 1 美元;

(3) 在超市 C 中, 所有商品的价格都是 1 美元或更便宜;

(4) 在超市 D 中, 所有商品的价格都超过 1 美元.

5. 下面哪个不等式是正确的?

(1) 对于任意角 α , 有 $\sin \alpha + \cos \alpha < 2$;

(2) 对于任意角 α , 有 $\sin \alpha + \cos \alpha \leq 2$.

6. $\sin \alpha$ 的最大值是多少? $\cos \alpha$ 的呢?

3.8 计算器与表格

一般而言, 给定一个角的度数大小, 计算出它的正弦数值是非常困难的. 比如, 怎么计算 $\sin 19^\circ$?

一种方法是作出一个含有 19° 角的直角三角形, 然后非常精确地量出它的边长. 然后这个角的对边与斜边的比就是 19° 的正弦.

但这不是数学家们喜欢的一种方法. 毕竟, 这个方法依赖于我们作图的精确性, 也依赖于我们所用直尺的测量精度. 我们想要找到一种仅仅使用算术运算就能求 $\sin 19^\circ$ 的方法. 数个世纪以来, 数学家们找到过一些非常聪明的方法, 不用作图就可以计算任意角的正弦值、余弦值和正切值.

通过使用计算器, 我们可以从他们的成果中受益. 你

手中的科学计算器上应该有一个键,上面标有“sin”,另一个键上标有“cos”,还有一个键上则标有“tan”.这些键可以分别给出各种角的正弦、余弦和正切的近似值.

警告:大部分“简单”的角,其正弦、余弦或正切的值并不简单.比如, $\tan 61^\circ$ 或者 $\sin 47^\circ$ 的值都不是有理数,甚至都不是一个有理数的平方根或三次方根.只有很少的一些角,其角度值是整数且其正弦、余弦或者正切值很“简单”.



练习

1. 找一个手持式的科学计算器,用它算出 $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$ 和 $\sin 60^\circ$ 的值.把这些值与我们在第 2 章中算出的值进行比较.

2. 叮当觉得 60° 的正切值是 $\sqrt{3}$.你该怎样用科学计算器验证这个结论?

3. 你该怎样用计算器计算 30° 角的余切? 20° 角的呢?

(提示:很多计算器都有一个标有“ $1/x$ ”的键.如果你按一下这个键,屏幕上将会显示之前所显示的那个数的倒数.)

4. 填表 3.3 和表 3.4.

表 3.3

用根式或者有理数表示				
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
30°				
45°				
60°				

表 3.4

用计算器上得到的小数表示				
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
30°				
45°				
60°				

3.9 从一个角的正弦值得到它的度数

例 3.10 在边长为 3, 4 和 5 的直角三角形中, 较小的那个锐角的度数是多少?

解 我们可以作一个非常精确的图, 再使用一个非常精确的量角器来回答这个问题. 但又一次, 数学家们已经为我们建立了不依赖器具精度的方法. 计算器用的就是这样的方法, 但你要先知道那些键是怎么用的.

我们要求的角, 其正弦值等于 $\frac{3}{5} = 0.6$. 输入 0.6, 然后找到标有“arcsin”或者“ $\sin^{-1}$ ”的键(对于某些计算器, 你需要先按这样的键, 然后再输入 0.6), 你会发现按键后屏幕上会出现一个接近 36° 的数, 这就是其正弦值等于 0.6 的角度值.

在计算器上, 你可以把符号“arcsin”或者“ $\sin^{-1}$ ”读作“其正弦值等于……的角是”. 类似地, “arccos”表示“其余弦值等于……的角是”, 而“ $\tan^{-1}$ ”则表示“其正切值等于……的角是”.



练习

1. 在正文中, 我们给出了边长为 3, 4, 5 的三角形中较小锐角的度数值的一个近似. 使用你的计算器, 给出该三角形较大锐角的度数值的一个近似. 再用你得出的近似值算一算这个三角形的三个角度之和是否等于 180° .

2. 用计算器, 求:

(1) $\arcsin 1$;

(2) $\arccos 0.7071067811865$.

3. 用计算器求余弦值等于 0.8 的角度大小.

4. 用计算器求正弦值等于 0.6 的角度大小.

5. 我们知道 $\sin 30^\circ = 0.5$. 估计一下 $\sin 15^\circ$ 的大小,

记下来,然后查表或者用计算器看看你估算得准不准.

6. 假设 $\sin x = 0.3$. 用计算器算出 x 的度数值. 然后再用计算器验算一下所得到角的正弦值是否等于 0.3.

7. 假设 $\arcsin x = 53^\circ$. 用计算器算出 x 的近似值. 然后再用计算器验算一下这个数求 $\arcsin$ 后的值.

8. 若 $\arcsin x = 60^\circ$, 不用计算器, 求 x .

9. 用计算器求 $\arcsin(\sin 17^\circ)$.

10. 用计算器求 $\sin(\arcsin 0.4)$.

11. 不用计算器, 求 $\arcsin(\sin 30^\circ)$. 然后仍然不用计算器, 求 $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$. 解释你的结果.

12. 用计算器, 分别对于 $A = 20^\circ$ 和 $A = 80^\circ$, 验证 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$.

13. 用计算器, 分别对于 $A = 20^\circ$ 和 $A = 80^\circ$, 验证 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

14. 通过使用计算器算出数值的方法, 画出当 x 从 0° 变到 90° 时, 函数 $\sin x$ 的图像.

3.10 解直角三角形

在生活中, 我们往往需要求解下面这种类型的问题.

例 3.11 如图 3.8 所示, 直角三角形的斜边长度是 5, 且它的一个锐角是 37° . 求另外两条边的长度.

解 用计算器可以算出 $\sin 37^\circ \approx 0.6018$ 以及 $\cos 37^\circ \approx 0.7986$.

因为 $\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{5}$, 所以

$$BC = 5 \sin 37^\circ = 5 \times 0.6018 = 3.009.$$

类似地, 有

$$AC = 5 \cos 37^\circ = 5 \times 0.7986 = 3.993.$$

这两个值都精确到了千分位.

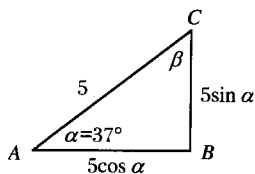


图 3.8



练习

1. 已知一个直角三角形,其斜边长度是 9,且一个锐角是 72° ,求它的两条直角边长度.

2. 已知一个直角三角形,其两条直角边长度分别为 7 和 10,求它的斜边长度以及两个锐角的角度.

3. 已知一个直角三角形,它的一条直角边长度是 12.若这条边所对的锐角是 27° ,求另一条直角边的长度,另一个锐角的度数,以及斜边的长度.

4. 已知一个直角三角形,它的一条直角边长度是 20.若这条边相邻的锐角是 73° ,求另一条直角边的长度,另一个锐角的度数,以及斜边的长度.

3.11 影子

太阳离地球是如此之远,从它那里出发到达地球的光线基本上是平行线.如果我们把地球上一小片区域视为是平坦的(我们平时确实是这么做的),那么太阳光线就以同样的角度射到这片小区域,如图 3.9 所示.

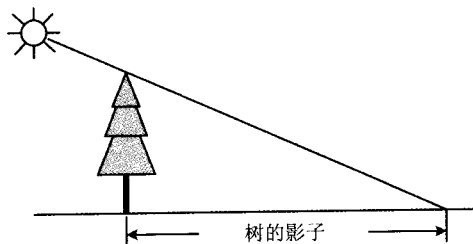


图 3.9

所以,如果给定一个物体的高度,我们就可以求出它的影子有多长.

例 3.12 若太阳光线与地面成 23° 角,那么一棵高 20 英尺^①的树,其影子有多长?

① 1 英尺 = 12 英寸 = 0.3048 米.

解 在图 3.10 中, AC 代表树, BC 则代表它的影子. 我们有

$$\tan 23^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{x}, \quad \text{即} \quad x = \frac{20}{\tan 23^\circ}.$$

用计算器可以算出 $\tan 23^\circ \approx 0.4244$. 所以 $x \approx \frac{20}{0.4244} \approx 47.13$ 英尺.

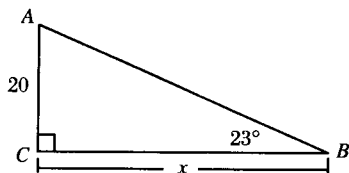


图 3.10



练习

1. 若太阳光线跟地面成 46° 角, 那么一栋高 50 英尺的建筑所投下的影子有多长?
2. 在某一个时刻, 太阳光线以 32° 角射到地面上. 在该时刻, 一根旗杆投到地上的影子是 35 英尺长. 问: 这根旗杆有多高?
3. 为什么影子在早上或者晚上最长? 你觉得影子在什么时刻最短?
4. 有没有可能一个物体根本没有影子? 在什么时刻、什么地点? (做这个问题, 你需要了解一点点天文学的知识.)

3.12 正弦比的另一种途径

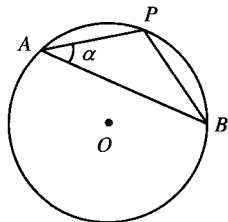


图 3.11

一个角的正弦与圆内的弦之间有一个简单的联系.

定理 若 α 是半径为 r 的圆上某点处 (如图 3.11 中的 A 点处) 正对着一条弦 PB 的角, 那么

$$\sin \alpha = \frac{PB}{2r}.$$

在证明这个定理之前,让我们先解决定理陈述中的一个问题.我们可以取圆上不同的点(比如图 3.12 中的 A' 和 A'' 点),然后考察同一条弦 PB 所正对的不同角.

选取哪个点是否有关系呢? 答案是没有关系. 几何学中的一个重要定理断言: 圆里面同一条弦所正对的角都是相等的^①. 所以我们在(大)圆弧 PB 上选什么点都没有差别.

因为上述原因,我们可以通过做一个特殊的选择来证明我们的定理: 我们把 A 点选为沿着直径与 B 点相对的点(图 3.13).

关于圆周角的同一个几何定理断言 $\angle APB$ 是一个直角, 所以

$$\sin \alpha = \frac{PB}{AB} = \frac{PB}{2r}.$$

这样就完成了定理的证明.

我们还可以给出这个定理的另一个证明. 考虑图 3.14.

在图中,我们已经从圆心 O 点向弦 PB 作了一条垂线. 从几何学我们知道,这条垂线的垂足 H 是 PB 的中点.

于是,与前面一样, $\angle APB = 90^\circ$, 这说明 AP 和 HO 是平行的. 因此, $\angle HOB = \angle PAB = \alpha$. 所以在直角三角形 HOB 中,我们得到

$$\sin \alpha = \frac{HB}{OB} = \frac{1}{2} \frac{PB}{OB} = \frac{PB}{2r},$$

这个结果与前面所证的一样.



1. 图 3.15 所示的是一条弦 AB 以及它所对的圆心角 $\angle AOB = \theta$. 假设圆的直径是 1. 问: AB 的长度与 θ 的关系是什么?

(答案: $AB = \sin \frac{\theta}{2}$.)

2. 现在还是用同一个图,但是假定圆的半径是 1.

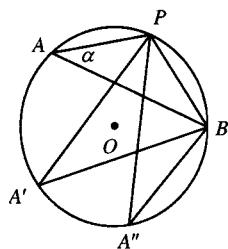


图 3.12

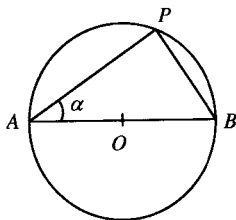


图 3.13

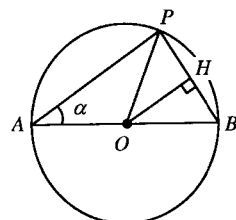


图 3.14

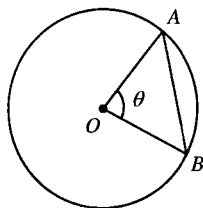


图 3.15

^① 参见本章附录中有关圆周角的定理.

问:现在 AB 的长度跟 θ 的关系是什么?

(答案: $AB = 2\sin \frac{\theta}{2}$.)

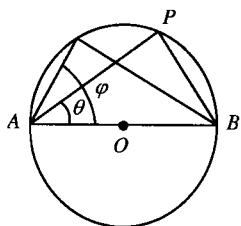


图 3.16

3. 图 3.16 所示的是一个直径为 1 的圆,以及圆上的两个锐角 θ 和 φ . 问:为什么这幅图说明了若 $\varphi > \theta$, 则 $\sin \varphi > \sin \theta$?

4. 从几何学我们知道可以通过任意三角形的三个顶点作一个圆.若三角形的三边长分别为 6,8 和 10,求这样作出的圆的半径.

5. 我们先从一个锐角三角形出发,作它的外接圆(即经过这个三角形三个顶点的圆).设 α 是这个三角形的任意一个角,其所对边的边长是 a .证明比值 $a : \sin \alpha$ 等于该圆的直径.

6. 用第 5 题证明:若 α, β, γ 是一个锐角三角形中的三个角, a, b 和 c 分别是它们所对的边,那么 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

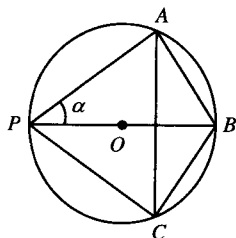


图 3.17

7. 图 3.17 所示是一个圆心在 O 点的圆, AB 和 AC 是圆上的弦.弧 AC 的长度是弧 AB 的两倍.图中已经作出直径 BP ,弦 AP 以及弦 CP ,且已知 $BP = 1$ (即圆的直径是单位长).若角 APB 是 α ,用此图证明 $\sin 2\alpha < 2\sin \alpha$.

(提示:你可能需要用到三角不等式,即在任意一个三角形中,任意两边边长之和大于第三边的边长.)

8. 在一个直径为 10 个单位的圆中,一个 60° 的圆周角所截出来的弦有多长?

9. 在一个直径为 10 个单位的圆中,一个 60° 的圆心角所截出来的弦有多长?

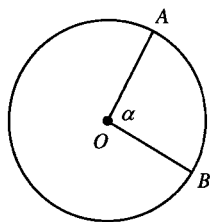
10. 求直径为 10 个单位的圆里的内接正方形的边长.

11. 如果你知道 $\sin 36^\circ$ 的确切数值,怎样计算直径为 10 的圆里的内接正五边形的边长?

附录 几何学复习

附录 1 测量弧

一个测量圆内一段弧长的办法是看看这段弧到底盖住了圆上多大的地方. 如附图 3.1 所示, 我们可以从圆心的角度来看这段弧, 作出正好割下这段弧的圆心角: 若圆心角 AOB 的度数是 α 度, 那么我们也称圆弧 $\widehat{AB}$ 是 α 度.



附图 3.1



练习

1. 半圆是多少度? 四分之一圆呢?
2. 圆内接正五边形的一条边所割下来的圆弧是多少度? 正六边形呢? 正八边形呢?

附录 2 圆周角与所对的弧

几何学中有一个非常重要的定理, 它不是把圆弧的度数与它所对的圆心角的度数联系起来, 而是与任意一个割出这段圆弧的圆周角联系起来.

定理 圆周角的度数是它所割出弧的度数的一半.

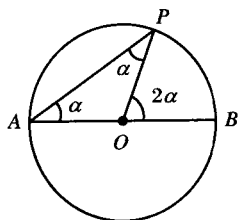
证明 我们分三种情形证明这个定理.

第一种情形: 我们假定圆周角的一条边是圆的一条直径.

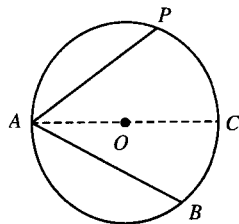
如附图 3.2 所示, 取圆周角 $\angle PAB$, 作 P 点 (其中 O 点是圆的圆心). 因为 OP 和 OA 是圆的半径, 它们长度相等, 即三角形 PAO 是等腰的. 于是 $\angle APO = \angle PAO = \alpha$. 但 $\angle POB$ 是这个三角形的一个外角, 所以它等于不相邻的两个内角之和, 也就是等于 $\alpha + \alpha = 2\alpha$. 于是弧 PB 的度数也是 2α , 即证明了定理在这种情形下成立.

第二种情形: 假定圆心不在圆周角的边上, 而在圆周角的内部.

如附图 3.3 所示, 若我们作直径 AC , 那么角 PAC 和



附图 3.2



附图 3.3

角 BAC 都是情形一已经处理过的圆周角. 所以我们有 $\angle PAC = \frac{1}{2} \widehat{PC}$ 和 $\angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{CB}$. 于是

$$\angle PAB = \angle PAC + \angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{PC} + \frac{1}{2} \widehat{CB} = \frac{1}{2} \widehat{PB},$$

而这正是我们要证明的.

第三种情形: 假定圆心在圆周角的外部.

如附图 3.4 所示, 若我们作直径 AC , 那么角 PAC 和 BAC 都是情形一已经处理过的圆周角. 所以我们有 $\angle PAC = \frac{1}{2} \widehat{PC}$ 和 $\angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{CB}$. 于是

$$\angle PAB = \angle PAC - \angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{PC} - \frac{1}{2} \widehat{CB} = \frac{1}{2} \widehat{PB},$$

而这正是我们需要证明的.

作为上述定理的一个推论, 我们给出下面的泰勒斯 (Thales) 定理. 这条定理是数学中有据可循的最古老的定理之一.

定理 在半圆里, 直径所对的圆周角是直角.

这个定理的证明只是上述结果的一个简单应用, 所以留给读者作为练习.



练 习

1. 若两个圆周角截出相同的弧, 证明这两个角一定相等.

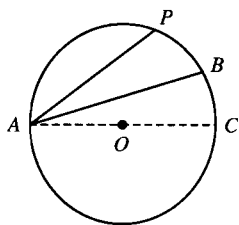
2. 求正五边形角的度数.

(提示: 任何一个正五边形都可以内接到一个圆里.)

3. 若一个四边形可以内接到一个圆里, 求证: 它的对角一定互补.

附录 3 ……还有它的反命题

当我们用一条线段表示一个特定的物体时, 有时候我们并不很在意它是多大, 而是在意它看上去有多大. 我们可以通过看看这个物体在我们的视线区域内占了多大的地方来估量这一点. 我们可以认为站在一个地方环视四周时, 自己的视野区域大小是 2π . 比如你站在如



附图 3.4

附图 3.5 所示的 P 点, 就可以以角度 APB 观察物体(用线段 AB 表示). 此时我们就说 AB 在 P 点张开了角 APB .

例如, 从地球上看过过去的话, 一颗星星所张开的角非常非常小, 虽然我们知道星星实际上是非常大的. 而太阳张开的角就大多了, 虽然我们知道太阳本身就是一颗星星, 而且并非是最大的那颗.

假设物体 AB 在 P 点处张开的角是 60° . 我们能否找到其他点, 使得在那些点处 AB 张开同样大的角呢? 从哪些位置看, 它可以张开更大的角呢? 从哪些位置看, 它会张开较小的角呢?

答案很有意思, 也很重要. 如附图 3.6 所示, 若我们过 A, B 和 P 点作一个圆, 那么相对于圆上位于线段 AB 某一侧的任意一个点, AB 都张开一个 60° 的角.

同样, 相对于圆内(位于 AB 同一侧的)任意一个点, AB 所张开的角都大于 60° , 而相对于(该侧)圆外面的任意一个点, AB 所张开的角都小于 60° .

所有这些结论都可由上节中定理的逆定理推导出来:

定理 设 AB 在 P 点处张开一个给定的角. 任取与 P 点位于 AB 同一侧的另一个 Q 点, 则

- 若 AB 在 Q 点张开的角跟 P 点张开的角一样大, 那么 Q 点位于经过 A, B 和 P 点的圆上.
- 若 AB 在 Q 点张开的角比 P 点张开的角大, 那么 Q 点位于经过 A, B 和 P 点的圆内.
- 若 AB 在 Q 点张开的角比 P 点张开的角小, 那么 Q 点位于经过 A, B 和 P 点的圆外.

(注意: Q 点和 P 点一定在线段 AB 的同一侧.) 这个逆定理的证明包含在下面的练习中.

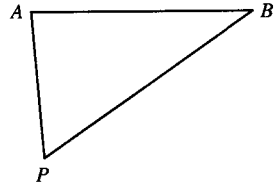
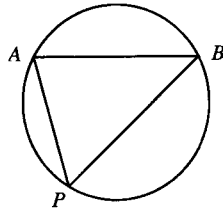


图 3.5



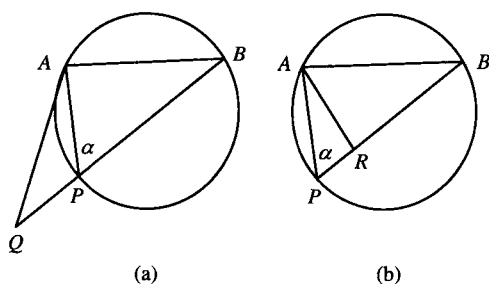
附图 3.6



练习

1. 从哪些点处看过去, 物体 AB 会张开一个 120° 的角?
2. 从哪些点处看过去, 物体 AB 会张开一个 90° 的角?

3. 附图 3.7 显示了一个在 P 点处张开角 α 的物体 AB . 根据附图 3.7 证明: 若 Q 点在圆外, 则 AB 在 Q 点处张开的角小于 α ; 若 R 点在圆内, 则 AB 在 R 点处张开的角大于 α .



附图 3.7

4. 如何用第 3 题的结论证明若一个角是给定弧的一半, 那么它恰好内接于该弧所在的圆上?

5. 使得物体 AB 所张开的角恰等于 α 的所有 P 点的集合并不是整个圆, 而只是弧 APB . 那么, AB 相对于圆上的其他点所张开的角是多大?

第 4 章

三角形内的关系

4.1 三角形的几何

我们要将学到的三角函数知识应用到含有三角形的几何问题中去。

首先我们看看三角形的三条边和三个角,如图 4.1 所示.这些数据中,我们需要几个就可以重构这个三角形?^①

这个问题是几何学中各种“全等定理”的主题.比如,如果我们知道 a, b 和 c (三条边),则“SSS 定理”告诉我们这三个角是完全确定的.任何两个具有相同三边边长的三角形是全等的。

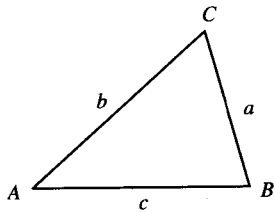


图 4.1

但我们能否用任意三个我们想要用的边长值组成一个三角形?几何学中的“三角不等式”告诉我们不行.因为我们必须保证三个边长中任意两边之和大于第三边;否则这些边无法组成一个三角形.在这个条件满足的前提下,我们可以说三角形的三边边长决定了该三角形。

三角形中还有哪些值的组合可以决定该三角形呢?稍微思考一下就可以发现,我们总是需要至少三个要素(边或者角),而几何学中的各种定理则可以帮助我们回答这个问题。

① 不要忘了若点 A, B 和 C 是一个三角形的三个顶点,则我们也把这个三角形的三个角的大小叫作 A, B 和 C . 此时,角 A, B 和 C 的对边边长分别称为 a, b 和 c . 三角形还有很多其他“要素”: 它的面积、角平分线、高、中线,以及许多别的有意思的线和值。

练 习

1. 表 4.1 给出了三角形的几组要素. 例如, “ ABa ”表示我们在讨论两个角和其中一个角的对边. 表中的某些情形实际上与另一些情形重复.

表 4.1

	数据	确定一个三角形?	限制条件?
1	ABa		
2	ABb		
3	ABc		
4	AbC		
5	ABC		
6	Abc		
7	Bbc		
8	Cbc		

对于每种情形, 请判定给定的数据能否决定一个三角形. 我们需要在给定的数据上加什么样的限制才能形成一个三角形? 其中有些限制比较微妙. “ abc ”已经在前面讨论过了.

请不要记忆这张表格. 我们只是要你回想一下几何学告诉过我们(以及它不曾告诉我们的)有关三角形的事实.

4.2 全等定理与三角函数

上面所给出的各组要素中, 有一些是可以决定一个三角形的. 比如, 数据“SAS”(三角形的两条边以及它们的夹角)总能够决定一个三角形, 而且任给这样一组数据, 一定能够找到一个三角形使得它的边角边是给定的数据.

但假定给了我们一个三角形的两条边的边长以及它

们所夹内角的角度值,我们怎么计算该三角形第三条边的边长,或者另外两个角的角度值? 几何学的 SAS 定理并没有告诉我们这一点. 后面几节的结果将会告诉我们在这种情况下,以及在很多其他情况下,怎么把三角形中缺失的要素求解出来.

4.3 正弦与高

每个三角形都有六个基本要素:三条边和三个角. 我们探索一下这六个基本要素和三角形的其他要素之间的关系.

我们先从三角形的高开始.

图 4.2 显示了一个三角形 ABC 以及 BC 边上的高. 因为这条高是三角形的边 a 上的高,用符号 h_a 代表它的长度. 类似地,我们用符号 h_b 和 h_c 来分别代表边 b 和边 c 上的高.

借助于正弦比,我们可以用六个基本要素给出 h_a 的表达式. 事实上,我们可以用两种不同的方法做到这一点:

在直角三角形 ABP 中,有 $\sin \beta = \frac{h_a}{c}$, 于是

$$h_a = c \sin \beta.$$

在直角三角形 ACP 中,有 $\sin \gamma = \frac{h_a}{b}$, 于是

$$h_a = b \sin \gamma.$$

我们可以通过将边、角换成其他对应边、角的方法,得到另两条高的公式. 为了使这种替换用起来更加便利,我们可以采用“循环置换”的方法,也就是说,

(1) 将 a 换成 b , 将 b 换成 c , 将 c 换成 a ;

(2) 将 α 换成 β , 将 β 换成 γ , 将 γ 换成 α .

这样我们就可以得到下面两组新的公式:

$$h_b = c \sin \alpha = a \sin \gamma,$$

$$h_c = b \sin \alpha = a \sin \beta.$$

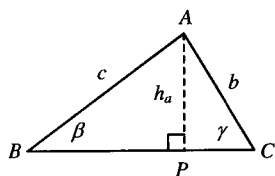
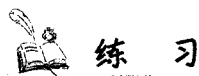


图 4.2



练习

1. 通过作包含 h_b 和 h_c 的图,证明上面最后两组公

式是正确的.

2. 在三角形 ABC 中, 已知 $\alpha = 70^\circ$ 且 $b = 12$, 求 h_c .

3. 对于直角三角形, 验证上述有关高的表达式都是正确的. (回想一下我们在 2.8 节中是如何定义直角的正弦的.)

4. 在三角形 PQR 中, 已知 $p = 10$, $q = 12$ 且 $\angle PRQ = 30^\circ$. 求它的面积.

4.4 钝角三角形

如果一个三角形包含一个钝角, 那么它就有两条高落在三角形的外面. 在 4.3 节中, 我们还没有考虑过这样的可能性. 下面就让我们来纠正这个疏忽.

在图 4.3 所示的三角形 ABC 中, 角 β 是一个钝角. 让我们再次将高 h_a 用它的基本要素(边和角)表示出来. (注意: h_a 位于该三角形的外面.)

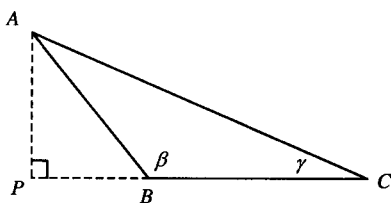


图 4.3

与前面相同, 三角形 APC 是一个直角三角形, 所以我们有

$$AP = h_a = b \sin \gamma.$$

根据上一节的结果, 我们还预期有

$$AP = h_a = c \sin \beta.$$

但是因为 β 是一个钝角, 对于 $\sin \beta$ 我们还没有一个定义.

为了解决这个问题, 我们可以从直角三角形 APB 出发, 在该三角形中 $AB = c$. 我们发现 $AP = AB \times \sin \angle ABP$, 即

$$h_a = c \sin (180^\circ - \beta).$$

这个公式稍微有点儿冗长,于是我们大胆地向前走一步:
定义 $\sin \beta$ 与 $\sin (180^\circ - \beta)$ 一样.

事实上,我们做出下面这个更一般的约定:

定义 一个钝角的正弦等于它的补角的正弦.

这样,即使 β 是一个钝角,还是可以得到 $h_a = c \sin \beta$.
在这种情况下,剩下的那些恒等式还是可以通过循环置换的方式导出,而且依然是成立的.

我们将会看到,这个定义的便利性不仅仅在于可以得到这个公式,还在于三角函数的很多其他应用.



练习

检验一下我们的新定义确实可以给出:

$$h_b = c \sin \alpha = a \sin \gamma,$$

$$h_c = b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

从而和循环置换法给出的结果一致.

4.5 正弦定律

在同一个三角形中,我们有 h_c 的两个表达式:

$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

如果把后两个相同的式子同除以乘积 $\sin \alpha \sin \beta$, 就会得到一个非常有意思的关系:

$$\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{b \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta},$$

即

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

而且采用和前面一样的循环置换方法,我们可以从另一对边出发得到对应的比例式. 于是我们得到

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

这是三角形中有关边和角的一个非常重要的关系. 它被称为**正弦定律**.

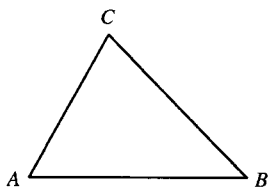


图 4.4

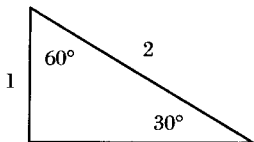


图 4.5

这个公式有很多有趣的着眼点. 比如, 从几何学中你可能已经学到: 若一个三角形(图 4.4)的两条边不相等, 那么较长的边所对的角也较大, 即若 $\beta < \alpha$, 则 $AC < BC$.

但是若角 β 是角 α 的两倍, 边 BC 的长度并不是边 AC 长度的两倍. 这个事实可以从图 4.5 中角分别是 30° , 60° 和 90° 的三角形中看得很清楚. 我们知道, 在该三角形中, 有一条边是另一条边的两倍长. 但那条边并不是 60° 角所正对的边, 而是斜边.

正弦定律给出了“大角对大边”这一事实的正确推广: 三角形的两条边之比等于它们所对角的正弦之比. 而我们已经知道, 两个角的正弦之比并不等于这两个角的度数之比.

正弦定律还可以在其他地方帮到我们, 这一点我们本章一开始时就已提到过. 根据几何学我们知道两个三角形全等, 若它们的两组对应角相等, 且一组对应边也相等(在很多教材中, 这个被称为 ASA 或者 SAA, 具体叫法取决于这组边是两角之间的边还是之外的边). 换言之, 两个角的大小以及一条边的长度决定了一个三角形. 虽然几何学告诉我们求第三个角的方法(依据三角形三个内角之和为 180° 这一事实), 但几何方法并没有告诉我们怎样计算出另外两条边的长度. 正弦定律可以让我们解决这个问题.



练习

1. 验证循环置换法给出了上面的等式.
2. 验证在角分别是 30° , 60° 和 90° 的三角形中, 正弦定律成立.
3. 对于图 4.6 所示的三角形, 使用正弦定律, 求出缺失的边长.(计算时需要使用计算器.)
4. 我们定义了钝角的正弦值等于它的补角的正弦. 利用这个定义, 证明正弦定律对于钝角三角形也成立.
5. 对于图 4.7 所示的三角形, 使用正弦定律, 求出缺

失的边长.

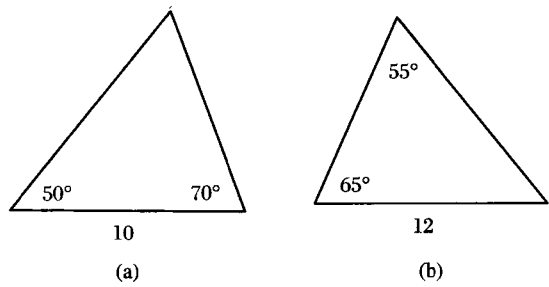


图 4.6

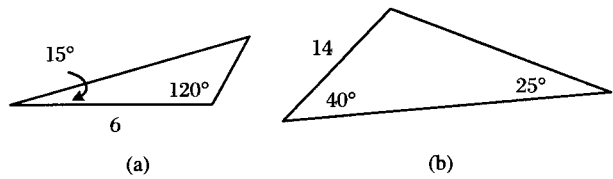


图 4.7

6. 用正弦定律求图 4.8 所示的三角形中缺失的两个角的大小.

7. 回想一下在几何学里,SSA 不能保证三角形全等. 也就是说,若两个三角形有两组对应边相等,且一组没有夹在这两组边中间的角对应相等,那么这两个三角形可以不全等. 回过头看看第 6 题. 这个三角形是唯一确定的吗? 剩下的两个角有多少种可能的角度值?

8. 假定三角形 ABC 内接于一个半径为 R 的圆. 证明下述扩展了的正弦定律:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

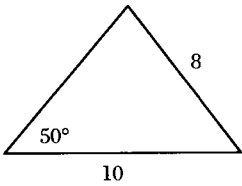


图 4.8

4.6 外接圆半径

对于任意三角形 ABC , 如果给出比值 $\frac{a}{\sin \alpha}$ 的一个几何解释, 那么我们将可以用另一种方式学到更多有关正弦定律的知识.

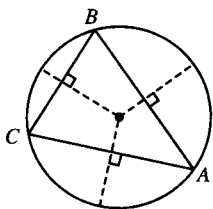


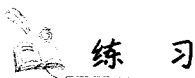
图 4.9

我们作这个三角形的外接圆,如图 4.9 所示.^①

假设这个圆的半径(即该三角形的外接圆半径,简称为外半径)是 R . 我们从第 3.12 节已经知道:

$$BC = a = 2R \sin \alpha.$$

所以比值 $\frac{a}{\sin \alpha}$ 就等于 $2R$.



1. 若一个三角形中有一个 30° 角,且其对边的长度是 10,求该三角形的外接圆半径.(注意:题目中的条件并没有完全确定这个三角形.)

2. 对于斜边为 8 的角分别是 30° , 60° 和 90° 的三角形,求它的外接圆半径.你是否真需要本节的结果来求这个外接圆半径?

4.7 三角形的面积

从关于高的公式出发,我们已经给了一个有意思的结果:正弦定律.接下来,我们说明怎样用它们来导出三角形面积的一个新公式.事实上我们将要给出的公式并不是全新的.它还是几何学中那个通常的公式,只不过是三角函数的形式表示出来.

若以 S 表示一个三角形的面积,则我们知道

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

但是 $h_a = b \sin \gamma$, 所以我们可以得到

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

这就是我们的“新”公式.与其他公式一样,我们可以使用“循环置换”的方法(见第 4.3 节)再给出两个公式:

^① 回想一下三角形三条边的垂直平分线交于一点,该点到三角形的三个顶点距离相等.这个点就是该三角形外接圆的圆心.

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}ca\sin\beta.$$



练习

1. 若一个三角形的两条边的边长分别是 8 和 11, 且它们的夹角是 40° , 求该三角形的面积.

2. 分别求图 4.10 所示的三个三角形的面积:

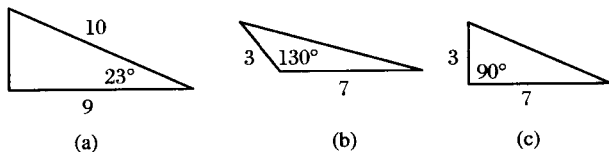


图 4.10

对于图(c), 能用我们的新公式吗? 必须要用新公式吗?

3. 已知三角形 ABC 的面积是 40, 边 AB 的长度是 6, 且角 A 是 40° . 求边 AC 的长度.

4. 在三角形 PQR 中, 边 $PQ = 5$, 边 $PR = 6$. 若该三角形的面积是 9, 求角 P 的度数.

(提示: 有两个可能的答案. 你能把它们都求出来吗?)

5. 一个三角形的两条边是 a 和 b . 这个三角形的面积最大可以是多少? 达到最大面积时, 这个三角形是什么形状?

(答案: 最大面积是 $\frac{ab}{2}$, 在这两条边之间的夹角是直角时达到.)

(挑战: 还有一个直角三角形具有边 a 和 b . 找出这个三角形并求它的面积.)

6. 等腰三角形一条腰的长度为 x . 用 x 表示该三角形面积的最大可能值.

7. 证明平行四边形的面积是 $ab\sin C$, 其中 a 和 b 是两条相邻边的边长, 而 C 是其中任意一个角. 用哪个角有差别吗?

8. 我们从任何一个包含其对角线与其图形内部的四边形开始. 证明该四边形的面积等于对角线乘积的一半再乘上对角线夹角的正弦. 我们应该取对角线之间所夹的锐角还是钝角?

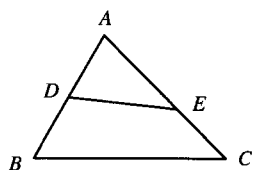


图 4.11

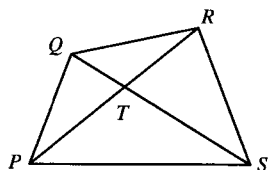


图 4.12

9. 证明可以用同一个公式计算其对角线(延长后)交于图形外部的四边形的面积.

10. 在图 4.11 中, $AD = 4$, $AE = 6$, $AB = 8$, $AC = 10$. 求三角形 ADE 的面积与三角形 ABC 的面积之比.

11. 在四边形 $PQRS$ (图 4.12) 中, 对角线 PR 与 QS 交于点 T . 三角形 PQT 与 RST 的面积之和等于三角形 PST 与 QRT 的面积之和. 证明 T 是该四边形中(至少)一条对角线的中点.

证明 角 PTQ , QTR , RTS , STP 的正弦都相等. 记这个正弦值为 s , 且以绝对值表示面积, 有

$$|PQT| + |RST| = \frac{1}{2} PT \times QT \times s + \frac{1}{2} ST \times RT \times s,$$

$$|QRT| + |PTS| = \frac{1}{2} QT \times RT \times s + \frac{1}{2} PT \times ST \times s.$$

故

$$PT \times QT + RT \times ST = QT \times RT + PT \times ST,$$

即

$$PT \times QT + RT \times ST - QT \times RT - PT \times ST = 0,$$

也就是

$$(PT - RT)(QT - ST) = 0.$$

上式说明必有一个乘式是 0, 所以 T 至少是一条对角线的中点.

12. 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 交于点 P . 以绝对值代表面积. 证明: $|APB| \times |CPD| = |BPC| \times |DPA|$. 若对角线的交点位于四边形的外面, 这个公式还正确吗?

13. 在锐角三角形 ABC 中, 求证: $c = a \cos B + b \cos A$.

(提示: 作边 c 上的高. 若角 A 或者角 B 是钝角, 我们应该怎么修改这个结果?)

4.8 两个注记

注记 1 注意这些公式都是用三角形的两边及其夹角表示三角形的面积. 从几何学我们知道, 这三个信息决定了该三角形(从而决定了它的面积), 但我们需要用到三角函数来实际计算其面积. 下一节中, 我们还会看到在给定两条边及其夹角的情况下, 三角函数是怎样帮助我们计算该三角形的其他要素的.

注记 2 现在我们有三种方法从几何上去理解 $\sin \alpha$.

(1) 在含有锐角 α 的直角三角形中, $\sin \alpha$ 是 α 的对边与斜边之比:

$$\sin \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}.$$

(2) 在任意三角形中, $\sin \alpha$ 是 α 的对边与外接圆直径之比:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}.$$

(3) 在任意三角形中, $\sin \alpha$ 是面积的两倍与夹住角 α 的两边乘积之比:

$$\sin \alpha = \frac{2S}{bc}.$$

我们可以使用任何一个与我们所处理的问题最契合的公式. 事实上, 这些公式中的每一个都可以被用作 $\sin \alpha$ 的定义.

4.9 余弦定律

余弦定律是一个非常古老的定理. 它在几何学的第一本教科书, 即欧几里得的《几何原本》里已经出现过, 虽然欧几里得并没有使用余弦这个名字. 余弦定律是勾股定理的一个推广.

在三角形 ABC 中, 若角 B 是一个锐角, 则

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B.$$

事实上,这个公式并不难证明.从直角三角形 BDC (图 4.13)中,我们有 $p = a\cos B$.在三角形 ACD 和 BCD 中,两次使用勾股定理,我们得到

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + q^2 = a^2 - p^2 + (c - p)^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2pc \\ &= a^2 + c^2 - 2cacos B, \end{aligned}$$

而这正是我们要证明的.

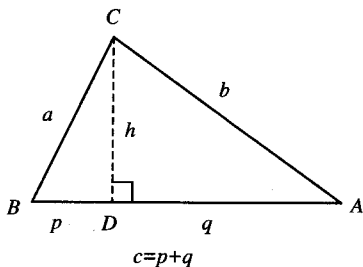


图 4.13

勾股定理告诉我们在直角三角形中,直角所对边的平方等于另外两条边的平方之和.

余弦定律推广了勾股定理,比如由余弦定律可知三角形中锐角所对边的平方小于另外两边的平方和.

那我们取三角形中钝角的对边,结果会如何呢?



练习

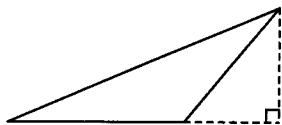


图 4.14

证明若 b 是一个三角形中钝角的对边,则 $b^2 = a^2 + c^2 + 2accos B'$, 其中 B' 是钝角 B 的补角.

(图 4.14 给出了一个提示.)

基于这个结果,我们做出第二个大胆的定义(第一个大胆的定义是钝角的正弦的定义):

定义 一个钝角的余弦等于其补角的余弦乘以 -1 .

所以我们就有了三个结果:直角三角形的勾股定理,以及关于锐角三角形和钝角三角形的两个新结果.和正弦定律一样,我们可以把这几个结果统一成一个公式,即所谓的余弦定律:在三角形 ABC 中,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B.$$



练习

1. 验证一下无论角 B 是锐角、直角还是钝角, 上式都是正确的.

2. 对于图 4.15 所示的每个三角形, 运用余弦定律将标出的边长平方用另外两边及其夹角表示出来.

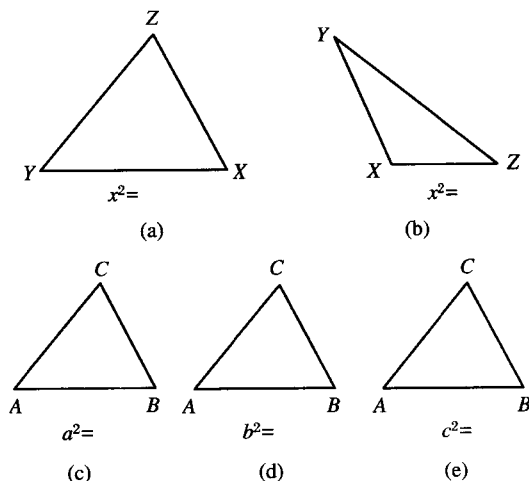


图 4.15

3. 从几何学我们知道, 任何一个三角形都是由 SAS (两条边的边长及其夹角的大小) 决定的. 试解释一下在给定 SAS 时, 如何用余弦定律求出该三角形剩余的其他要素.

4. 对于图 4.16 中的每个三角形, 求标有 x 的边或者角.

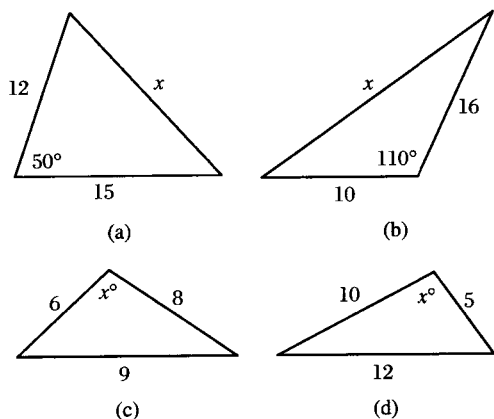


图 4.16

5. 在三角形 ABC 中, $AB=10$, $AC=7$ 且 $BC=6$. 求该三角形中每个角的大小.

6. 宁宁的老师布置了下面这道题:

已知平行四边形的边长分别为 3 和 12. 求它的两条对角线的长度的平方和.

但宁宁在作图时犯了难. 他知道平行四边形的对边相等, 所以他知道 3 和 12 分别该放在哪儿. 但这样他就不知道该画什么形状的平行四边形了. 他画了一个长方形(据他所知, 这也是一种平行四边形). 然后他画了一个夹角是 30° 角的平行四边形, 以及另一个夹角是 60° 角的平行四边形. 但他不知道该用哪个来做计算.

你能帮宁宁克服困难吗?

7. 证明在任意平行四边形中, 四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

8. 若 M 是三角形 ABC 中边 BC 的中点, 则 AM 被称为三角形 ABC 的一条中线. 证明对于中线 AM , 有 $4AM^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$.

(提示: 本题的图形是第 7 题图形的“一半”.)

9. 证明任意三角形三条中线的平方和等于它的三条边平方和的 $3/4$.

10. 四边形 $ABCD$ 的对角线交于该四边形的内部. 证明该四边形四条边的平方和等于它的两条对角线的平方和, 再加上连接其两条对角线中点的线段长度平方的四倍.(注意: 这个结论推广了第 7 题.)

11. 在三角形 ABC 中, 角 C 等于 60° , $a=1$ 且 $b=4$. 求边 c 的长度.

12. 在三角形 ABC 中, 角 C 等于 60° . 求证: $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. 在角 C 等于 120° 的三角形中, 对应的结论是什么?

13. 三位马背上的骑手从点 X 出发沿着三条不同的道路前进. 这三条道路在 X 处形成三个 120° 的角. 第一位骑手的速度是 60 英里^①每小时, 第二位的速度是 40 英里每小时, 而第三位的速度是 20 英里每小时. 问: 一小时后这些骑手两两相距多远? 两小时后呢?

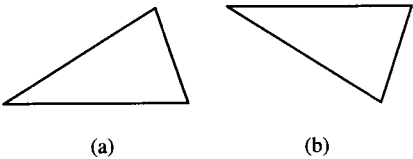
① 1 英里 = 1.609 千米.

附录 三大理​​念及其应用

附录 1 不变量:平面内的运动

我们经常谈到三角形的全等.两个三角形是全等的,是指我们可以移动其中之一使得它与另一个完全重合.所以我们可以认为两个全等的三角形就是同一个三角形:它们只是位置不一样.

如果规定我们的移动只能在平面之内进行,那附图 4.1 所示的两个三角形就不能被认为是全等的.因为要把它们之一移动到与另一个完全重合,我们必须把它先翻转一下(沿着一条线反射).这两个三角形互为**镜像**.



附图 4.1



练习

1. 大部分三角形,如果不沿着某条线反射的话,就不能与它的镜像完全重合.然而,有些特殊的三角形根本不用沿着某条线反射也能与它的镜像完全重合.画一个这样的三角形.
2. 描述一下所有可以不经过沿某条线反射就能与其镜像完全重合的三角形.
3. 画一些可以不经过沿着某条线反射就能与其镜像完全重合的四边形.

附录 1.1 三角形不变量

三角形不变量是指由三角形决定的但与其位置无关的量.因此对于全等的两个三角形而言,其任意一个三角

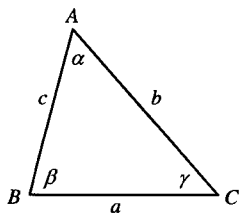
形不变量的值是相同的. 三角形不变量的一些例子有: 边的边长(三个), 角的度数(三个), 以及面积. 虽然这七个量是最基本的, 但确实还有很多其他的三角形不变量, 比如高的长度, 外接圆半径, 等等.

在处理三角形不变量之间的关系时, 我们已经把三角形的几何与代数学以及三角函数联系起来了. 所以数学家们会说代数学和三角函数是几何学的**分析工具**.

附录 1.2 正弦与三角形不变量

我们可以用三角形不变量给出一个角的正弦的另一种定义. 事实上, 我们已经知道怎么做了.

我们在 4.7 节中学到, 对于任意一个三角形(附图 4.2),



附图 4.2

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

其中 γ 是两条边 a 和 b 所夹的角. 所以如果我们从任意一个角 γ 开始, 作一个包含它的三角形(不必是直角三角形), 然后把围出这个角的两条边记为 a 和 b , 那么我们就可以定义 $\sin \gamma$ 为 $\frac{2S}{ab}$, 其中 S 是这个三角形的面积.

无论你是把这个作为我们原本处理方式的一个推广, 还是把它作为角的正弦的一种定义, 我们都有

$$\sin \alpha = \frac{2S}{bc}, \quad \sin \beta = \frac{2S}{ac}, \quad \sin \gamma = \frac{2S}{ab}.$$



练习

1. 注意到如果附图 4.2 中的 α 是一个直角, 那么 $\triangle ABC$ 的面积就是 $\frac{bc}{2}$. 证明在这种情况下, 上面给出的 $\sin \beta$ 和 $\sin \gamma$ 的公式与在第 2 章中给出的是一样的.

2. 利用余弦定律, 证明在任意面积为 S 的三角形 ABC 中,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S \cot \gamma.$$

附录 2 对称性

让我们再看一下把一个三角形的面积用两条边及其

夹角的正弦表示出来的公式. 我们已经知道了这样的公式有三个:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \quad S = \frac{1}{2}ca\sin\beta.$$

上面的每个公式都可以从别的公式开始, 通过对 a, b 和 c 以及对应的 α, β 和 γ 之间进行**循环置换**而得到.

一般地, 只要我们有一个关于三角形的公式, 就可以预期这种对称性. 没有一条边或者一个角相比于其他的边或者角而言更特殊, 所以如果我们对它们进行循环置换, 就依然能够得到一个有效的公式.

我们也可以反过来看这个过程. 考虑如下三个相等的量:

$$ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta.$$

只要我们有三个相等的对称表达式, 往往就可以找到一个它们之所以相等的几何原因. 在上面这个例子里, 它们都等于三角形面积的两倍.

在应用循环置换时, 我们一定要先确认公式里的每一个变量都可以表示为三角形中的任意一个边或者角. 比如, 勾股定理说若 a 和 b 是一个直角三角形的两条直角边, 而 c 是斜边, 则 $a^2 + b^2 = c^2$. 我们不能把 a 换成 b , b 换成 c , 且 c 换成 a , 因为公式里的 c 不能是该三角形的任意一条边: 它必须是斜边. (然而我们依然可以把 a 换成 b , b 换成 a .)



练习

1. 余弦定律告诉我们

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

用循环置换的方法, 再写两个这样形式的公式.

2. 正弦定律告诉我们

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

你能够找到上面这三个量之所以相等的几何原因吗?

(提示: 见 4.5 节的练习第 8 题.)

附录3 正弦及其量纲

物理学家们除了应付数字外,还要应付量纲,因为他们所使用的数字常常是某些测量的结果.比如,三角形的边是以长度单位(比如厘米)测量的,而它们的面积则是以长度单位的平方(比如平方厘米)测量的.我们可以从物理学家那里借用这种想法:在代数或者三角恒等式中,要注意等号两边应该有同样的量纲.比如,在勾股定理中,两边的量纲都是长度的平方,也就是与面积一样的量纲.事实上,我们对这个定理的证明就是把它解释成一个关于面积的论断(欧几里得在《几何原本》中的证明也是这样的).

那么 $\sin \alpha$ 的量纲是什么呢? 在我们一开始定义它的时候, $\sin \alpha$ 就是两个长度的比,所以它的量纲其实是 0.(这是用另外一种方式来说明在计算角度的正弦值时,用于测量三角形边长的长度单位是不会影响计算结果的.)

检查一下在我们的新公式中,量纲是正确的.我们已经写出来了 $\sin \alpha = \frac{2S}{bc}$. 因为 S 的量纲是长度的平方,而乘积 bc 也有同样的量纲(长度乘以长度),所以量纲抵消掉了,于是 $\sin \alpha$ 的量纲是 0. 这与我们上面的结果一致.



练习

对于下面的每个公式,验证等号两边的量纲是一样的.

$$(1) \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta};$$

$$(2) \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

$$(3) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

$$(4) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

附录4 海伦公式

我们知道具有相同的三边边长的任意两个三角形都

是全等的.这意味着对于任意的三角形不变量,比如面积,它们都会给出相同的值.也就是说,三角形的三边边长**决定了**它的面积.

有一个非常漂亮的公式,相传是亚历山大城的海伦(Heron)发现的,把三角形的面积用它的三边边长表示出来.若三角形的三边边长分别为 a, b 和 c , 且记 $s = \frac{a+b+c}{2}$, 那么有

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

下面来证明这个公式.

我们知道 $\sin \gamma = \frac{2S}{ab}$, 所以

$$\sin^2 \gamma = \frac{4S^2}{a^2 b^2}.$$

根据余弦定律,有

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

即

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

于是

$$\cos^2 \gamma = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2 b^2}.$$

回忆一下 $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, 现在我们需要东西就都有了. 如果把上面的结果代入 $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma$, 我们就可以得到一个仅仅包含 S, a, b 和 c 的公式, 而这就是我们需要的.

事实上,

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = \frac{4S^2}{a^2 b^2} + \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2 b^2} = 1,$$

即

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2 b^2,$$

也就是

$$16S^2 = 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

这就是我们需要的关系式, 但它看上去并不“漂亮”. 比如, 它看上去关于 a, b 和 c 并不对称.

实际上它是对称的. 我们可以通过对等式右边应用平方差公式进行因式分解来证明这一点:

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)],$$

从而有

$$16S^2 = [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)]$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(-a^2 + 2ab - b^2 + c^2).$$

上式右端的每个因子依然是两个平方之差:

$$16S^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2],$$

于是我们可以再次因式分解:

$$16S^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c]$$

$$\cdot [c+(a-b)][c-(a-b)]$$

$$= (a+b+c)(a+b-c)$$

$$\cdot (a-b+c)(-a+b+c).$$

到了这里,我们就已经看到了表达式中漂亮的对称性. 我们可以把这个关系式写成

$$S^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{16},$$

即

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}}{4}.$$

这个公式已经很漂亮了,但如果令 $s = \frac{a+b+c}{2}$, 我们还

可以把它变得更漂亮一点. 此时有

$$a+b-c = 2s-2c,$$

$$b+c-a = 2s-2a,$$

$$c+a-b = 2s-2b.$$

把这些结果代入上面的公式,就得到

$$S = \frac{\sqrt{(2s)2(s-a)2(s-b)2(s-c)}}{4}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$



练习

1. 对于三边边长分别为 3, 4 和 5 的三角形, 验证海伦公式算出的面积值是正确的.

2. 对于三边边长分别为 5, 12 和 13 的三角形, 验证海伦公式算出的面积值是正确的.

3. 应用海伦公式,证明边长为 l 的等边三角形的面积是 $\frac{\sqrt{3}l^2}{4}$.

4. 证明从公式 $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ 出发也可以导出第 3 题的公式.

5. 用海伦公式解答 1.4 节练习中的第 9 和第 10 题.

附录 5 一位物理学家的解释

海伦公式看上去可能有点奇怪.因为在大部分面积公式里,你要乘的仅仅是两个量,但这里我们是把四个量乘起来了.然后通过求平方根进行修正,而这在面积公式里面也是不平常的.

为了对这个公式能够稍微有点感觉,我们可以设想一下费恩曼(Richard Feynman).他是一位物理诺贝尔奖获得者,非常擅长用简单的方法去解释复杂的问题.他可能会用下面的方式去解释海伦公式:

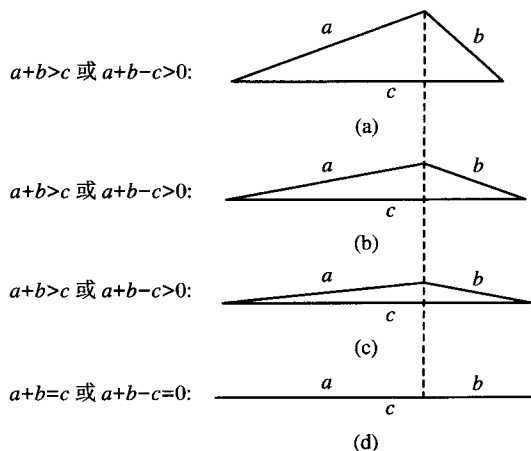
在高中时我曾经修过一门很好的几何学课程,而且我记得我学了海伦公式,这个公式把三角形的边长跟面积联系起来了.但我忘记公式的准确形式了.让我想想我能不能回忆起来.我知道这个公式里面有一个平方根.^①因为面积的量纲是长度的平方,所以在根式里面我们一定要有一个四次多项式.^②我们可以通过把四个一次的因式乘起来而得到这样一个多项式.

那这些因子可以是什么呢?嗯,若 $a + b = c$,那么我们这个三角形实际上是一条线段(正如三角不等式所断言的那样),其面积是 0.所以当 $a + b - c = 0$ 时,整个多项式是 0.这意味着 $a + b - c$ 是这个多项式的一个因式.类似地, $a - b + c$ 必然也是一个因式,还有 $-a + b + c$

① 事实上,费恩曼的数学家朋友们可以解释为什么这个公式里一定要有一个平方根.这个解释涉及如下事实:对于三角形的面积可以附加一个正负号,该符号依赖于三角形的定向.

② 对于一个多元多项式,它的每项的次数等于该项里出现的所有变量的指数之和,而该多项式的次数则等于它的各项的最高次数.

必然也是(附图 4.3).



附图 4.3

所以根式下面这个多项式的四个因式,我们已经找到其中三个了.第四个因式可以是什么呢?它一定是 a , b 和 c 的线性式,且它关于这三个变量一定是对称的.^①这说明第四个因式必须是 $k(a+b+c)$ 的形式,其中 k 是一个常数.

于是,我们一定有

$$S = C \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$
其中 C 是一个常数.我们可以通过验算一个特定的三角形,来确定这个常数.我记得边长分别是 3, 4 和 5 的三角形是一个直角三角形.这个三角形的面积是 6,而对于这个特定的三角形,表达式

$$S = C \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$
的值是 $C \sqrt{(12)(2)(4)(6)} = C \times 24$. 所以 $C = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. 我

还记得可以通过引入 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 的方式,从代数上对这个式子进行化简,但我会把这个留给我的数学家朋友们.既然在弄明白这个表达式的过程中我已经享受到乐趣,那么我会把真正的证明也留给他们.他们很擅长这件事.

^① 在这里费恩曼的意思是:若我们交换 a , b 和 c 中的任意两个,这个多项式的值不变.

第 5 章

角 与 旋 转

5.1 测量旋转角

在前面的章节中,我们探索了诸如 $\sin 30^\circ$, $\cos 45^\circ$ 和 $\tan 60^\circ$ 这样的表达式的意思. 在这一章和下一章中,我们会说明为什么可以使用诸如 $\sin 180^\circ$, $\tan 300^\circ$ 甚至 $\sin 1000^\circ$ 这样的表达式.

但 1000° 可以量什么呢? 显然它不是测量三角形的角度时得到的,这些角只能是处于 0° 到 180° 之间(锐角、直角或者钝角). 它也不是测量圆里面的角度或弧度时能得到的. 它们只会位于 0° 到 360° 之间.

你要是拥有过电动小火车玩具,可能曾经试过把车轨搭成圆形,然后让火车绕着圆圈轨道向前跑. 图 5.1 显示了这样一个圆形轨道. 若一辆小火车从点 A 开始,绕着圆形轨道行驶,最后开回到点 A,我们就说它绕着这个圆转了一整圈. 因为我们把一个圆分成了 360° ,所以可以很自然地说这辆小火车绕着这个圆转了 360° .

现在假定这辆小火车在经过点 A 后继续行驶,还是绕着圆前进. 那我们就可以说它转了超过 360° . 如果它绕着圆转了两圈,回到点 A,如图 5.2 所示,我们就说它转了 $360^\circ + 360^\circ = 720^\circ$.

如果它再绕着圆向前开一会儿,经过了度数为 280° 的弧,那我们就说它转了 $720^\circ + 280^\circ = 1000^\circ$,如图 5.3 所示.

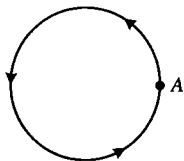
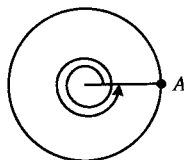
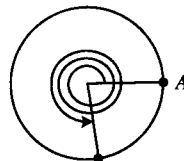


图 5.1



720°的旋转

图 5.2



1000°的旋转

图 5.3

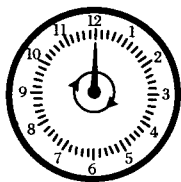


图 5.4

下面是另一个例子. 看一看钟表的时针(图 5.4). 在 12 小时的时间里它转了一整圈, 也就是转了 360° .

但在这个例子里, 旋转是沿着顺时针方向的(这就是顺时针这个词的来源), 而我们前面的火车则是沿着逆时针方向转的. 在平面上, 有两种不同的旋转方向, 事实表明区分这两种方向是很重要的. 数学家们把逆时针方向的旋转叫作正的, 而把顺时针方向的旋转叫作负的. 所以我们可以说在 12 小时的时间里, 钟表的时针完成了一次 -360° 的旋转.

练习

作图表明以下各种旋转.

- | | |
|--------------------|-------------------|
| (1) 160° ; | (2) 190° ; |
| (3) 400° ; | (4) 600° ; |
| (5) 1200° ; | (6) -70° ; |
| (7) -400° ; | (8) 360° ; |
| (9) -270° . | |

5.2 旋转与角度

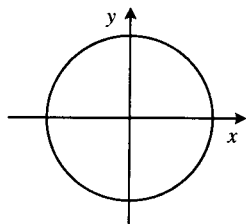


图 5.5

作一个半径为 1 的圆, 其中心位于坐标系的原点, 如图 5.5 所示.

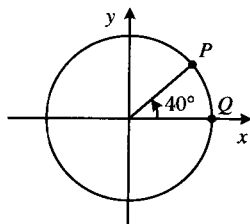


图 5.6

我们作一个一条边落在 x 轴上的锐角, 它的另一条边将会位于第一象限的某处. 如果这个锐角的度数是 40° , 那么我们可以通过从点 Q 出发旋转 40° 得到点 P , 如图 5.6 所示. 所以可以把角度和旋转联系起来. 即使旋转超过了 180° , 我们有时候还是谈论其“角度”而不是说“旋转”. 图 5.7 给出了一些例子.

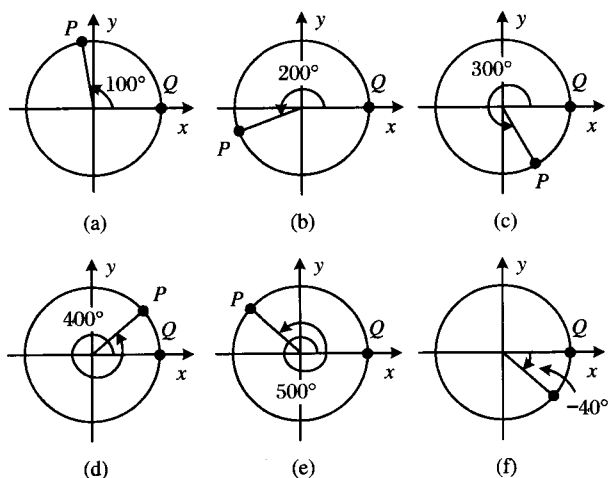


图 5.7

5.3 所有角的三角函数

让我们再来看看 $\sin 40^\circ$ 的意思. 我们将会换一种方式来看它, 而这种方式将会帮助我们理解 $\sin 300^\circ$, $\cos 1100^\circ$ 或者 $\tan(-240^\circ)$ 这样的表达式的意思.

如图 5.8 所示, 作一个半径为 r , 圆心在坐标原点的圆. 为了求出 $\sin 40^\circ$, 我们在第一象限里标出使得 $\angle POR = 40^\circ$ 的点 P , 然后作 x 轴的垂线 PR .

从直角三角形 POR 中, 我们可以看到

$$\sin 40^\circ = \frac{PR}{OP} = \frac{PR}{r}.$$

类似地, 我们有

$$\cos 40^\circ = \frac{OR}{r}.$$

但若点 P 的坐标是 (x, y) , 那么就有 $y = PR$ 且 $x = OR$. 所以我们得到

$$\sin 40^\circ = \frac{y}{r}, \quad \cos 40^\circ = \frac{x}{r}.$$

到这里为止, 我们并没有说出任何新东西.

或者已经有点儿新东西了?

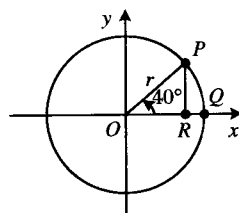


图 5.8

我们可以把正弦和余弦的定义拓展到我们可以测量出的旋转的新角上去. 如图 5.9 所示, 假定点 P 开始时在位置 $(r, 0)$ 上, 然后旋转了角 α . 若点 P 的坐标是 (x, y) , 我们就可以定义 $\cos \alpha$ 和 $\sin \alpha$ 分别为

$$\cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

注意: 当 α 是锐角时, 这些新定义与以前的老定义是一致的.

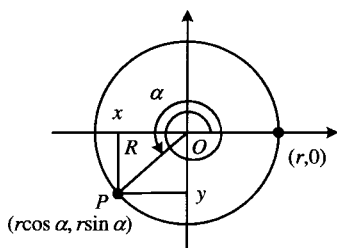


图 5.9

例 5.1 求 $\sin 130^\circ$ 和 $\cos 130^\circ$ 的值.

注意: 根据 4.4 节的内容, 我们已经知道了 $\sin 130^\circ = \sin (180^\circ - 130^\circ) = \sin 50^\circ$, 所以事实上这个量已经被定义过了. 但我们看看新定义是否可以给出同样的结果.

解 图 5.10 给出了 $\angle QOP = 130^\circ$. 图中圆的半径为 r , 点 P 则是从点 Q 旋转了 130° 角后的点. 若点 P 的坐标是 (x, y) , 那新定义就告诉我们:

$$\cos 130^\circ = \frac{x}{r},$$

$$\sin 130^\circ = \frac{y}{r}.$$

下面让我们看看直角三角形 OPR , 其中 $\angle POR = 50^\circ$. 注意到

$$\frac{y}{r} = \frac{PR}{OP} = \sin 50^\circ.$$

所以这就是 $\sin 130^\circ$ 的值.

三角形 OPR 还可以给出 $\cos 130^\circ$ 的值, 但我们一定要小心一点. 因为点 P 的 x 坐标是负的, 所以我们只能写出

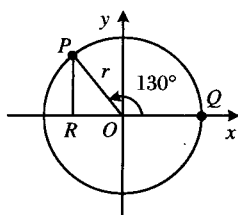


图 5.10

$$\cos 130^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{OR}{OP} = -\cos 50^\circ$$

因此, $\cos 130^\circ = -\cos(180^\circ - 130^\circ) = -\cos 50^\circ$. 这个值与第 4.9 节给出的定义一致.

很重要的一点是上面的结果不依赖于 OP 的长度. 我们可以选择半径为任意值的一个圆, 作一个 130° 角的相应的图. 三角形 OPR 总会有相同的角, 而计算也是一样的.

例 5.2 $\cos 210^\circ$ 和 $\sin 210^\circ$ 的值是多少?

解 因为圆的半径无关紧要, 我们可以自由选择, 比如, 半径为 1 的圆. 此时我们的新定义导致了图 5.11, 此时角分别是 30° , 60° 和 90° 的三角形的几何学告诉我们点

P 的坐标是 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. 于是

$$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{和} \quad \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}.$$

注意 210° 的正弦和余弦都是负数.

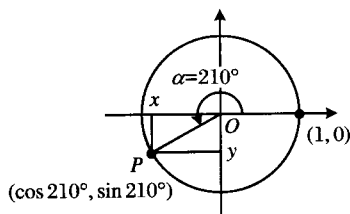


图 5.11

例 5.3 求 $\cos 360^\circ$ 和 $\sin 360^\circ$ 的值.

解 我们选取半径为 1 的圆. 对于 360° 的旋转, 点 P 的坐标是 $(1, 0)$. 故 $\cos 360^\circ = 1$, 而 $\sin 360^\circ = 0$.

既然我们对任意角都定义了正弦和余弦, 那也可以对任意角定义其他的三角函数.

对于任意角 α ,

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

例 5.4 求 $\tan 210^\circ$ 的值.

解 根据例 5.2 的结果, 我们有

$$\tan 210^\circ = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

注意这个值是正的.

关于正弦和余弦的新定义, 对于任意 α 都有值. 但这一点对于正切、余切、正割和余割的新定义而言就不太对了, 因为它们都涉及除法. 所以必须要保证我们没有除以 0.

事实上, 若 $\cos \alpha = 0$, 我们就无法定义 $\tan \alpha$. 诸如 $\tan 90^\circ$, $\tan 270^\circ$ 和 $\tan(-90^\circ)$ 之类的表达式都是没有定义的.

由于同样的原因, 我们也无法定义 $\cot 0^\circ$ 或者 $\csc 180^\circ$.



练习

1. 求下面每个表达式的值. 先不要计算器, 做完之后再再用计算器检查你的答案.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| (1) $\sin 390^\circ$; | (2) $\cos 3720^\circ$; |
| (3) $\tan 1845^\circ$; | (4) $\sin 315^\circ$; |
| (5) $\cot 420^\circ$; | (6) $\tan(-30^\circ)$. |

2. 求下面每个表达式的值, 或者指出该表达式是没有定义的.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| (1) $\tan 360^\circ$; | (2) $\sin 180^\circ$; |
| (3) $\cos 180^\circ$; | (4) $\cot 90^\circ$; |
| (5) $\cot 360^\circ$; | (6) $\tan(-270^\circ)$. |

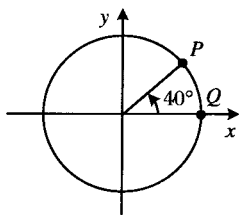


图 5.12

5.4 带旋转角的计算

让我们回过头来看看最开始的图(图 5.12): 一个角位于一个圆中. 原本, 我们认为这是一个 40° 的角. 但是 400° 角的图看起来也是一模一样, 还有 760°

或者 -320° 的图也是如此. 任何两个相差一整圈的角, 它们的图看起来都是完全一样的. 因此, $\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ)$.

类似地, 对于任意角 α , 有 $\cos \alpha = \cos(\alpha + 360^\circ)$.

这个观察将有助于我们简单地求出很大角的正弦值、余弦值、正切值或者余切值.

例 5.5 $\cos 1140^\circ$ 是多少?

解 如果我们将 1140 除以 360, 其商为 3, 而余数为 60, 也就是说, $1140 = 3 \cdot 360 + 60$. 所以 $\cos 1140^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

例 5.6 100000° 的正弦是正的还是负的?

解 如果将 100000 除以 360, 我们得到 277, 而余数为 280. 所以 100000° 的正弦与 $\sin 280^\circ$ 一样. 因为点 P 位于第四象限, 它的 y 坐标是一个负数, 所以 100000° 的正弦是负的.

你可以使用计算器来验证这些解是否正确, 后者已经“知道”一个角的正弦是正的还是负的了. 更确切地说, 设计计算器的人在制作计算器的时候就已经做了你刚刚做的例题.

但能够“预知”三角函数的某些值, 或者至少辨别它们的值是正的还是负的, 也是很重要的. 不难发现若点 P 最终位于第一象限, 那么这些角的所有三角函数都是正的. 若点 P 位于第二象限, 则正弦值和余割值是正的, 而另外四个函数的值是负的, 如此等等.

练习

验证图 5.13 对于各个象限的角度给出了相应函数的正确符号.

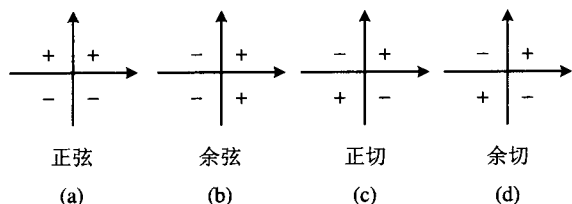


图 5.13

有时候我们甚至还可以预知到更多的关于三角函数值的事情. 如果你仔细看看图 5.14, 就会发现从绝对值上来说, $\sin \theta$ 等于该角的一条边与 x 轴所夹锐角(下面各图中标有 γ 的角)的正弦值:

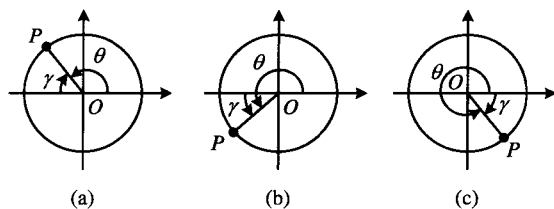


图 5.14

例 5.7 求 $\sin 300^\circ$.

解 在转了 300° 后, 点 P 位于第四象限. 所以 $\sin 300^\circ$ 是负的. 此外, 这个角的一条边与 x 轴夹的角是 60° . 所以 $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



练习

1. 转了 400° 后点 P 将会位于哪个象限? 3600° 呢? 1845° 呢? -30° 呢? -359° 呢?

2. 完成表 5.1(你无需使用计算器). $\sin \alpha$ 和 $\sin(-\alpha)$ 之间的关系是什么?

表 5.1

$\sin 30^\circ$		$\sin(-30^\circ)$	
$\sin 135^\circ$		$\sin(-135^\circ)$	
$\sin 210^\circ$		$\sin(-210^\circ)$	
$\sin 300^\circ$		$\sin(-300^\circ)$	
$\sin 390^\circ$		$\sin(-390^\circ)$	
$\sin 480^\circ$		$\sin(-480^\circ)$	

3. 对于以下方程, 求满足 $0 < \alpha < 360^\circ$ 的解 α .

(1) $\sin \alpha = 0$;

(2) $\cos \alpha = 0$;

$$(3) \sin \alpha = 1; \quad (4) \cos \alpha = 1;$$

$$(5) \sin \alpha = -1; \quad (6) \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$(7) \sin \alpha = -\frac{1}{2}; \quad (8) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2};$$

$$(9) \cos^2 \alpha = -\frac{3}{4}.$$

4. (1) 若 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, α 可能位于哪个象限? $\cos \alpha$ 可能取什么值?

(2) 若 $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, α 可能位于哪个象限? $\cos \alpha$ 可能取什么值?

5. 我们在 3.6 节已经知道若 a 和 b 是满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的非负数, 则存在角 θ 使得 $\sin \theta = a$ 且 $\cos \theta = b$. 证明: 即使 a 或 b 是负的, 这个性质依然成立.

5.5 奇函数与偶函数

考虑 5.4 节练习中第 2 题的结果. 如果表格填得都正确, 你会注意到, 对于给定的角, $\sin \alpha$ 和 $\sin(-\alpha)$ 总有相反的符号. 这个关系在一般情况下都是成立的:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad (\text{对任意角 } \alpha \text{ 成立})$$

类似地, 我们有如下关系:

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha,$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

但是余弦函数的情形是不一样的. 我们有

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

一般地, 我们可以区分两类函数:

一个函数被称为**偶函数**, 若对于任意 x , 都有 $f(-x) = f(x)$.

一个函数被称为**奇函数**, 若对于任意 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$.

比如说,函数

$$f(x) = \cos x, \quad f(x) = x^2 + 3, \quad f(x) = \frac{1}{x^6}$$

都是偶函数,而函数

$$f(x) = \tan x, \quad f(x) = x^3 + 4x, \quad f(x) = \frac{1}{x^7}$$

都是奇函数.下面两个函数既不是奇函数也不是偶函数:

$$f(x) = x^3 + x^2, \quad f(x) = \sin x + \cos x.$$

总而言之: $\cos x$ 是一个偶函数,而 $\sin x, \tan x$ 以及 $\cot x$ 都是奇函数.

这可能就是有些数学家宁可使用余弦函数而不使用正弦函数的原因.



练习

1. 下面哪些函数是偶函数? 哪些函数是奇函数? 哪些函数两者都不是?

(1) $f(x) = x^6 - x^2 + 7$;

(2) $f(x) = x^3 - \sin x$;

(3) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

(4) $f(x) = \sec x$;

(5) $f(x) = \csc x$;

(6) $f(x) = 2\sin x \cos x$;

(7) $f(x) = \sin^2 x$;

(8) $f(x) = \cos^2 x$;

(9) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2. 对于任意函数 $f(x)$, 证明

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$$

是一个偶函数,而

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

是一个奇函数.用这个结果证明,每个函数都可以被写成一个偶函数与一个奇函数的和.

3. 将下面的每个函数都表示成一个偶函数与一个奇函数的和.

$$(1) f(x) = \sin x + \cos x;$$

$$(2) f(x) = x^3 + x^2 + x + 1;$$

$$(3) f(x) = 2^x;$$

$$(4) f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x};$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{x+2}.$$

第 6 章

弧 度 法

6.1 角与旋转的弧度法

到现在为止,我们用以计量角的大小和旋转幅度的单位是度.如图 6.1 所示,我们使用量角器量出角的度数.

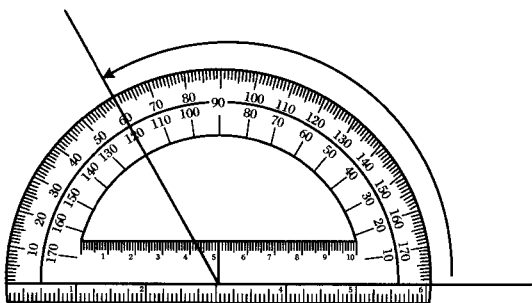


图 6.1

为什么转一圈正好是 360° 呢? 这个问题的答案在于历史,而不在于数学.事实上还有一种更加便利的方法计量角度和旋转,叫作弧度法.数学家们和科学家们发现弧度法是一种天然的用于表示角度关系的方法.与度数法不同,弧度法不依赖于任何测量单位.

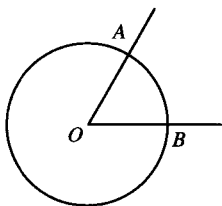


图 6.2

为了用弧度法测量一个角度,我们把它顶点放在任何一个圆的圆心(图 6.2),然后考虑弧 AB 的长度,可以用英寸、厘米或者别的长度单位来计量.

这段弧的长度依赖于角 AOB 的大小,如图 6.3 所

示.但它同时也依赖于圆的半径大小,如图 6.4 所示.

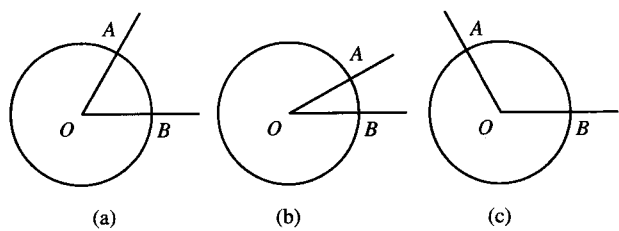


图 6.3

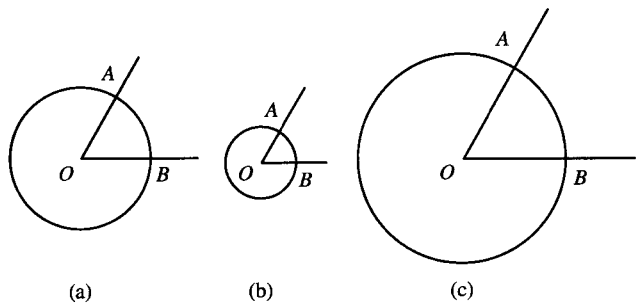


图 6.4

所以我们不能简单地采用这段弧的长度作为该角度的计量.但是这段弧的长度与圆半径的比值仅仅依赖于该角度的大小(图 6.5).

定义 一个角的弧度值等于把这个角的顶点放在任意一个圆的圆心时,它所割出的圆弧长度与该圆半径的比值.^①

这个定义可以让我们想起角的正弦和余弦的定义:它们也是被定义成比值,而且也都不依赖于含有该角的特定直角三角形.

例 6.1 一个 60° 的角,其弧度值是多少?

解 我们把 60° 角的顶点放在一个半径为 r 的圆的圆心,然后看看它所割出的圆弧.因为 $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$,这段弧是

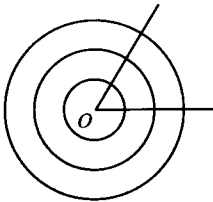
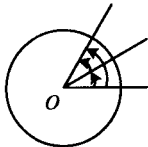


图 6.5

^① 这种计量法契合如下两个简单的准则.第一,角越大,弧度值就越大.第二,若我们把两个角并列放在一起(如下图所示),



则它们并在一起形成的大角的弧度值等于原来两个角的弧度值之和.

这个圆的周长的 $\frac{1}{6}$, 所以它的长度是 $\frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{3}$ 单位.^① 根据我们的定义, 60° 的弧度值等于如下比值:

$$\frac{\pi r/3}{r} = \frac{\pi}{3}.$$

算出数值, 约等于 1.0471976, 也就是比 1 弧度稍微大一点点.

例 6.2 一个 360° 的角, 其弧度值是多少?

解 其弧度是 $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

例 6.3 1 弧度的角, 其度数值是多少?

解 2π 弧度的角是 360° (见例 6.2). 所以 1 弧度的角是 $\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$.

在例 6.3 中, 我们用了一个非常重要的事实, 即弧度值与度数值成**正比例**. 事实上, 不难看出来, 任何一个角的弧度值与它的度数值之比总是 $\frac{\pi}{180}$:

$\frac{\text{弧度值}}{\text{度数值}} = \frac{\pi}{180}.$
--

一般来说, 当我们用弧度计量一个角的时候, 不在后面添加任何像表示“度”的小圆圈标志那样的特殊符号.

例 6.4 求 $\sin \frac{\pi}{6}$.

解 首先用度表示这个角. 若 D 是这个角的度数值, 那我们就有

$$\frac{\text{弧度值}}{\text{度数值}} = \frac{\pi/6}{D} = \frac{\pi}{180}.$$

由此可推出 $D = 30^\circ$, 而我们知道 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

例 6.5 在一个半径为 1 的圆中, 一个 2 弧度的圆心角所割出的圆弧有多长?

解法 1 (繁杂的方法) 用上面的方法我们可以算出该角的度数值大约是 114° . 所以这个角所割出的圆弧大约是

$$\frac{114}{360} \times 2\pi \approx 1.989675347274$$

① 回想一下, 若一个圆的半径是 r , 那么它的周长就由公式 $2\pi r$ 给出.

个单位长.

解法 2 (简洁的方法)在单位圆(即半径为 1 单位的圆)中,圆心角的弧度值恰好等于它所割出圆弧的长度.由此我们知道所求的圆弧恰好是 2 单位长(这也让我们大概了解到在解法 1 中,因为使用了度数的近似值,最后结果的误差有多大).

例 6.6 在半径为 2 单位的圆中,一个圆心角割出了一段长度为 5 单位的圆弧.这个角的弧度值是多少?

解 根据定义,这个弧度值是 $\frac{5}{2}$.



练习

- 1. 一个 180° 的角,其弧度值是多少? 90° 的呢?
- 2. 一个 2 弧度的角,其度数值是多少?
- 3. 一个 $\frac{1}{4}$ 周的旋转,其弧度值是多少?
- 4. 一个 45° 角的旋转,其弧度值是多少?
- 5. 填表 6.1.

表 6.1

度数值	弧度值
90	
180	
270	
360	
	$\frac{\pi}{2}$
	π
	$\frac{3\pi}{2}$
	2π

- 6. 填表 6.2 和表 6.3.
- 7. 一个 1° 的角,其弧度值是多少?
- 8. 用计算器分别算出以下角度的正弦值:
 - (1) 1 弧度;
 - (2) 1° .

表 6. 2

度数值	弧度值
0	
30	
72	
120	
135	
	$\frac{\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{5}$
	$\frac{\pi}{4}$
	$\frac{\pi}{3}$
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{7\pi}{10}$

表 6. 3

度数值	弧度值
198	
210	
216	
225	
240	
	$\frac{11\pi}{10}$
	$\frac{10\pi}{9}$
	$\frac{7\pi}{6}$
	$\frac{6\pi}{5}$
	$\frac{5\pi}{4}$
	$\frac{4\pi}{3}$

9. 不用计算器,填表 6.4.

10. 在一个半径为 1 的圆里,一个 2 弧度的圆心角所割出的圆弧有多长? 3 弧度的呢? π 弧度的呢?

11. 在一个半径为 3 的圆里,一个 2 弧度的圆心角所割出的圆弧有多长? 3 弧度的呢? π 弧度的呢?

表 6.4

α (弧度值)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{3}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{2\pi}{3}$		
$\frac{7\pi}{6}$		
$\frac{5\pi}{4}$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{11\pi}{6}$		

12. 若 $\sin \frac{\pi}{9} = \cos \alpha$ 且 α 是锐角, α 的弧度值是多少?

13. 若 α 是一个弧度值介于 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的角, $\sin \alpha$ 和 $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ 谁更大?

14. 让我们取一个弧度值为 1 的角. 根据图 6.6, 证明该角的度数值是小于 60° 的. (事实上, 1 弧度的角大约是 57° .)

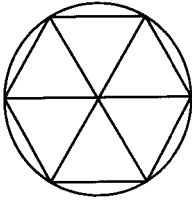


图 6.6

6.2 弧度表示法与距离

想象一个半径为 1 英尺的车轮. 如图 6.7 所示,

让这个车轮沿着平直的马路不打滑地滚动起来.^①因为车轮在滚动时不打滑,所以它所滚过的距离,以英尺计算的话,恰好是角度 α 所割出圆弧的长度.

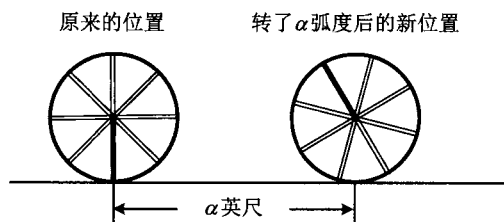


图 6.7

例 6.7 半径为 1 英尺的车轮,滚动了 1 整圈后前进多远?

解 因为它在滚动时不打滑,车轮前进的距离恰好等于该圆的圆周长度.但如果圆的半径是 r 的话,那周长就是 $2\pi r$. 因为 $r=1$,所以答案就是 2π ,也就是大约 6.28 英尺.

例 6.8 一个半径为 1 英尺的车轮滚动了 $\frac{1}{2}$ 圈.它前进多远?

解 它前进的距离是 π ,也就是大约 3.14 英尺.

例 6.9 若一个半径为 1 英尺的车轮沿着一条直线滚过了 2 弧度的角,它前进多远?

解 2 英尺.

例 6.10 若一个半径为 1 英尺的车轮沿着一条路前进了 5 英尺,它滚过了多少弧度的角?

解 5 弧度.

例 6.11 若一个半径为 1 英尺的车轮沿着一条路前进了 1000 英尺,它滚过了多大的角? 分别给出用弧度和度数表示的答案.

解 用弧度表示的话,这个就非常简单:它滚过了

① 有时候汽车的轮子在滚动的同时会滑动,这种现象叫作**滚滑**,在车轮与地面的摩擦力不足时(比如当路面结冰或者湿了时)会发生.汽车的轮子也有可能旋转而不滚动:有时候,卡在深深的雪地中的汽车,它的轮子会**高速打转**.我们假设轮子不会发生这些情况.

1000 弧度.

用度数表示的话,这个答案计算起来就复杂多了.每滚动一整圈就走过 2π 英尺的距离.所以在前进 1000 英尺的过程中,我们的车轮滚过了 $\frac{1000}{2\pi} \approx 159.155$ 圈.因为每圈都是 360° ,1000 弧度的滚动所对应的度数值就是 $159.155 \times 360^\circ \approx 57296^\circ$.

例 6.12 一个 1000° 的角,其弧度值是多少?

解 一个 1000° 的旋转相当于转了 $\frac{1000}{360} \approx 2.77$ 圈,而每圈都是 2π 弧度.所以 1000° 用弧度表示就是 $2.77 \times 2\pi \approx 17.405$ 弧度.

例 6.13 $\sin 500$ (其中角度是以弧度表示的)是正数还是负数?

解 因为 $\frac{500}{2\pi} \approx 79.577$,即 500 弧度是 79 个整圈加上大约 0.57 个新的一圈.因为 $0.5 < 0.57 < 0.75$,这是介于一整圈的 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{4}$ 之间.所以 500 弧度的旋转会停在第三象限,从而它的正弦值是一个负数.



练习

1. 若半径为 1 英尺的圆沿着一条道路前进了 5 英尺,它滚过了多少弧度?

2. 若半径为 1 英尺的圆沿着一条道路前进了 5 英尺,它滚过了多少度数?

3. 若半径为 1 英尺的圆滚过了 4 弧度的角,它前进了多少英尺?

4. 若半径为 1 英尺的圆滚过了 120° 的角,它前进了多少英尺?

5. 在一个半径为 1 的圆里,一个 $\frac{1}{2}$ 弧度的角所割出圆弧的长度是多少? $\frac{\pi}{2}$ 弧度呢? α 弧度呢?

6. 一个 720° 的角,其弧度值是多少? 1440° 的角呢? 3600° 的呢? 15120° 的呢? 一个弧度值是 12π 的角,其度数是多少? 15π 的角呢? 100π 的呢?

7. 在一个半径为 3 的圆里, 一个 $\frac{1}{2}$ 弧度的角所割出圆弧的长度是多少? $\frac{\pi}{2}$ 弧度呢? α 弧度呢?

8. 在一个半径为 3 的圆里, 一个弧度值是 1.5 的角所割出的圆弧有多长?

9. 在一个半径为 5 的圆里, 一个 80° 的角所割出的圆弧有多长?

10. 在一个半径为 2 的圆里, 对应弧的长度为 3 单位的圆心角, 其弧度值是多少?

11. 在一个半径为 6 的圆里, 对应弧的长度为 2 单位的圆心角, 其度数值是多少?

12. 一个半径为 7 单位的圆沿着一条直线滚动. 若它滚过了 20 单位的距离, 则它所转过的弧度值是多少?

13. 一个半径为 8 的圆沿着一条直线滚动, 共旋转了 150° 的角. 它滚动了多远?

14. 钟表的时针一小时转了多大的角度? 请用弧度作答.

15. 钟表的分针一小时转了多大的角度? 秒针呢?

16. 在解第 14 题时, 乐乐是这么做的: 钟面上的一小时是 $\frac{1}{12}$ 个圆, 所以转的角是 $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ 弧度. 用度数写的话, 答案就是 $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. 但其实无论是用弧度还是用度数, 乐乐做得都不对. 找出并纠正他的错误. 你在这个问题以及关于钟表的类似问题上是否也犯过同样的错误?

(提示: 钟表的几个臂有没有转? 往哪个方向?)

17. 让我们看一看时针恰为 1 英寸长的怀表. 假设在转的时候, 这根时针的末端总共行进了 1000 英寸远的距离. 问: 总共用了多长时间?

18. 假设伦敦大本钟的时针长度恰为 1 码^①长. 问: 大本钟的时针转过 1000 弧度需要多长时间?

19. 一个半径为 1 米的车轮沿着一条直线滚动. 它的一根辐条被漆成了红色. 在开始的时候这根辐条是竖直的, 且其端点指向地面. 问: 车轮转过多少弧度后, 该辐条再次回到这个位置? 车轮转过多少弧度后, 该辐条会变

① 1 码 = 3 英尺 = 36 英寸 = 0.9144 米.

成竖直且端点指向天空？

20. 一个半径为 1 米的车轮沿着一条直路滚动. 该路面按照 3 米距离设标志, 每隔 3 米都有一个红点. 车轮上某个位置沾了还没有干的蓝色油漆. 当它开始滚动的时候, 该位置正好跟地面接触. 在车轮滚动的过程中, 每次该位置接触地面时都会在地面上留下一个蓝点.

(1) 这些蓝点之间的间距是多远？

(2) 在车轮留下一个蓝点到留下下一个蓝点的时间内, 车轮滚动了多大的角度？

(3) 蓝点会有可能与红点重合吗？

(4) 如果蓝点与红点不会重合, 它与红点可以隔多远？(如果你懂得怎样用电脑或者计算器编程, 你可以写一个程序来回答这个问题.)

(5) 现在假定每两个红点之间的间隔都被分成了四个间距相等的小间隔, 比如, 在中间标了粉色的点. 当车轮转过第 100 圈时在地面上留下了一个蓝点. 问: 这个蓝点出现于哪两个点之间？

6.3 插曲: 怎样向弟弟妹妹们解释弧度表示法

当坐在妈妈或者爸爸的车里时, 你有没有注意过里程计? 就是在方向盘前面的那一小行数字. 它记录了车辆行驶过的距离, 单位是千米(公里).

但它是怎么知道行驶距离的呢? 里程计可不认识路边那些标有公里数的路标. 它只能从汽车的车轮那里得到这个信息. 但汽车的车轮只能告诉里程计自己转了多少圈. 车轮转的圈数越多, 汽车行驶的距离就越远. 里程计知道怎么把圈数转化成公里数. 我们从几何学中学到, 半径为 r 的圆的周长是 $2\pi r$. 里程计真正所需要知道的就只是这个公式以及车轮的半径是多少.

假设车轮告诉里程计它已经转了 50 圈, 那么里程计就知道车轮已经开过了 $50 \times 2\pi r$ 米, 其中 r 是车轮的半

径,单位是米(当然它还要把这个数字转化成千米).而要是车轮只转了 $\frac{1}{4}$ 圈,里程计就只会增加一段 $\frac{1}{4} \times 2\pi r$ 米,当然此处还是要转化成千米.

如果想知道车轮已经磨损了多少,那我们也需读一下里程计,然后算算轮胎一路行来已经转了多少圈.所以若里程计显示车已经行驶了200米(当然这个数字是从公里数转化而来的),那200就等于 $2\pi r$ 乘以车轮已经转过的圈数.也就是说,车轮已经转过了 $\frac{200}{2\pi r}$ 圈.

而这就是我们所说的车轮旋转的弧度表示.

6.4 弧度表示法与计算器

大部分计算器以及所有的科学计算器都有弧度表示.你可以让计算器在“度数模式”和“弧度模式”之间转换(而且有时候甚至还有其他方法计量角度).但不同类型的计算器,其具体的转换方式可能是不一样的.所以你需要知道如何判断你所使用的计算器当前所处的模式,以及怎样从一个模式转换到另一个模式.



练习

1. 一名学生用他的计算器算1的正弦.算出来的值是0.8414709848079.这个计算器是处在弧度模式还是度数模式?

2. 对于很小的角, $\sin x$ 大约等于 x ,其中 x 是用弧度表示的.使用你的计算器,对于弧度值为0.2,0.15,0.05的角,分别求出 x 和 $\sin x$ 之间的差到底有多大.在每种情况下, x 和 $\sin x$ 谁更大?

3. $\sin x$ 的一个更好的近似值(其中 x 是以弧度表示的)是由公式 $x - \frac{x^3}{6}$ 给出的.对于上一题给出的三个角,求出这个值与 $\sin x$ 实际值之间的误差.

4. 在旧式的炮兵学校,教官们会使用某种版本的

$\sin x \approx x$ 来估算. 但是, 他们只能量出角的度数, 所以他们使用的公式是 $\sin x = \frac{x}{60}$. 若 $x = 10^\circ$, 这个逼近公式的误差有多大?

5. (1) 不用计算器, 猜一猜 $\sin 0.1$ (角度以弧度表示) 的值. 再用计算器验算一下你猜得准不准.

(2) 对于 $\sin 0.1$ (角度以度数表示), 重复上述实验.

6. (1) 若一个角的度数值是 1000, 求其正弦.

(2) 若一个角的弧度值是 1000, 求其正弦.

7. (1) 求 $\sin(\sin 1000)$, 其中角度是以弧度表示的.

(2) 求 $\sin 3.14$, 其中角度是以弧度表示的.

8. 不能使用计算器的求三角函数值的功能, 证明 $\cos 1.5707$ 小于 0.0001.

(提示: 你认出 1.5707 这个数了吗?)

6.5 一个重要的图

让我们通过作出其图像的方法把关于正弦函数的知识总结一下.

在 x 轴方向最便利的标度是 π 的整数倍, 因为在这些点处 $\sin x$ 的值很容易算出来. 而对于 y 轴, 我们只需要 -1 到 1 之间的值, 因为 $\sin x$ 只能取这些值.

通过观察单位圆并记录下它与 x 轴成 α 角的点的高度, 我们就可以作出图像, 图 6.8 显示的是一个有代表性的锐角 α 所对应的点. 当 α 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $y = \sin x$

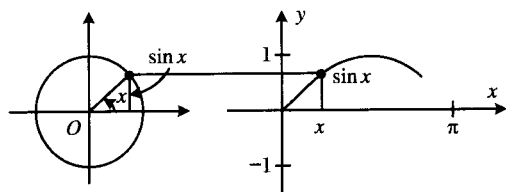


图 6.8

的图像是上升的.

图 6.9 是第二象限的典型场景:

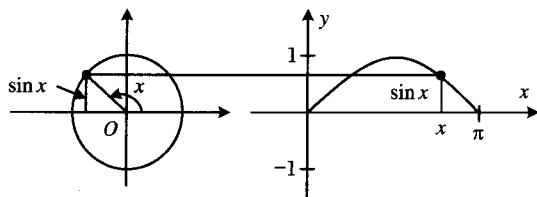


图 6.9

而在第三和第四象限, 图像分别如图 6.10(a) 和 (b) 所示.

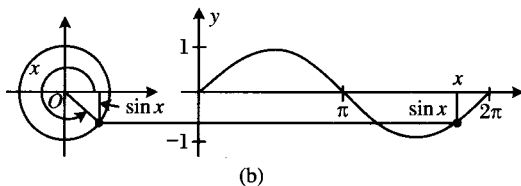
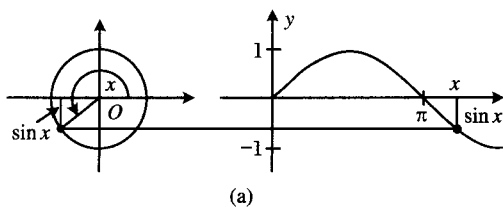


图 6.10

当 α 转过 2π 弧度之后, 整个循环会不断重复. 对于负的 α 值, 情况是一样的. 图 6.11 是完整的曲线.

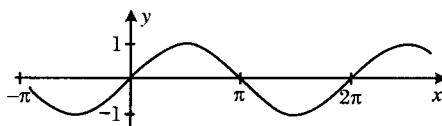


图 6.11

练习

利用上面的图像回答以下问题. 你可以使用计算器检查某些答案.

(1) $\sin \frac{7\pi}{5}$ 是正的还是负的? 估计它的值.

(2) $\sin \left(-\frac{3\pi}{7} \right)$ 是正的还是负的? 估计它的值.

(3) 我们知道 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. 在图上验证这一点. 正弦函数还在哪些点取到 $\frac{1}{2}$ 这个值?

(4) 对于 x 的哪些值, 我们有 $\sin x = \sin \frac{\pi}{12}$? 在 x 轴上尽可能多地标出这些值.

(5) 对于 x 的哪些值, 我们有 $\sin x = 0.8$? 估出使得这个式子成立的一个 x 值. 然后在 x 轴上标出你能找到的尽可能多的值.

6.6 两个小奇迹

我们在这里暂停一下, 来描述两个值得注意的关系. 它们非常不同寻常, 以至于看起来像奇迹一般. 这两个奇迹的解释(即数学证明)被推迟至本书的末尾, 即第 10 章的附录.

奇迹一 正弦曲线下方的面积

观察一下曲线 $y = \sin x$ 的第一段“拱形”(图 6.12). 对于这段弧下方的面积, 我们可以知道什么呢? 该面积当然小于 π , 因为整个区域都落在一个长与宽分别为 π 和 1 的长方形内.

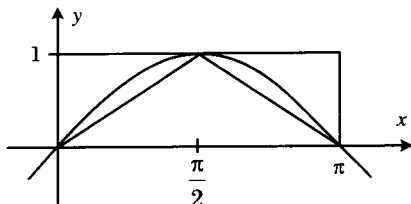


图 6.12

同时, 该面积也大于图 6.12 所示的等腰三角形的面

积, 后者的面积是 $\frac{\pi}{2}$. 所以如果想要估计这段弧下方的面积值, 我们会说它介于 $\frac{\pi}{2}$ 和 π 之间. 我们还可以通过使用更多的三角形“填充”曲线下方区域的方法来进一步地估计弧下方的面积. 实际上, 在微积分中就是采取这样的方法.

最终结果则是一个小奇迹: 正弦曲线的一段“拱形”下方的面积正好是 2.

奇迹二 正弦曲线的切线

如图 6.13 所示, 让我们在曲线 $y = \sin x$ 上取一个点 $P(\alpha, \sin \alpha)$. 假设从点 P 出发的垂线与 x 轴相交于点 Q . 我们再作出曲线在点 P 处的切线, 将它延长并与 x 轴相交于点 R . 很容易看出 $PQ = \sin \alpha$.

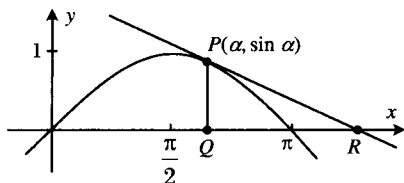


图 6.13

但是, 作为一个小奇迹, 我们还可以求出 QR 的长度. 它的值是 $|\tan \alpha|$, 即 $\tan \alpha$ 的绝对值.

附录 弧度表示法的一些优点

注意角度的弧度值与它们的度数值一样是可以相加的. 也就是说, 如果把两个角拼在一起“加出”一个更大的角, 那么这两个角的“和角”对应于相应弧的和.^①

① 每当我们想要测量某种东西的时候, 总是希望该测量是可加的. 比如长度是可加的, 面积和体积也都是. 然而, 只要去一趟食品杂货店, 你就会发现可口可乐的价格不是可加的. 两瓶 6 盎司的价格加起来多半要比一瓶 12 盎司的贵, 因为你要为包装、贴标签、运输等付费.

弧度的另一个优点是它是**无量纲的**.也就是说,它与计量所采用的单位无关.比如说,长度可以用厘米、英寸或者英里来计量,而我们会得到不一样的数值.面积、体积以及很多其他量都是如此.但弧度值与角度的正弦值类似,都是比值,因而不依赖于计量圆的弧长或者其半径时所用的单位.这是物理学家们(以及很多其他科学家们)喜欢使用弧度的另一个原因.

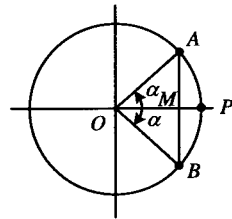
因为角的弧度和正弦都是无量纲的,所以我们可以比较它们.对于一个锐角 α ,是 $\sin \alpha$ 的值大还是 α 的弧度值大呢?

当这个角度很小的时候,几何学可以帮助我们回答这个问题.在附图 6.1 中,我们取一个单位圆,然后作一个很小的角 AOP .接下来我们再作一个和这个角同样的角(紧贴着第一个角),且将它记为 POB ,则弧 AP = 弧 PB .

若这段弧的长度是 α ,那么以弧度值计算,就有 $\angle AOP + \angle POB = \frac{2\alpha}{1}$ (因为这个圆具有单位半径,而且 $\angle AOP = \angle POB = \alpha$).在直角三角形 AOM 中,我们发现 $AM = \sin \alpha$,故 $AB = 2\sin \alpha$.因为弧 AB 比线段 AB 要长,所以我们得到 $2\sin \alpha < 2\alpha$,也就是 $\sin \alpha < \alpha$.

从附图 6.1 中我们还可以看到,若角 α 充分小,那么 2α 和 $2\sin \alpha$ 之间是非常接近的.^①

我们再一次看到了弧度制的优点.如果角 α 是用度数表示的,那么我们能够给出的最佳断言将只能是 $\sin \alpha < \frac{\alpha \pi}{180}$.而且使用弧度制的时候我们甚至还可以证明稍微多



附图 6.1

① 两个数之间非常“接近”是什么意思呢? 比如,1 和 0.99 当然是非常接近的,它们之间的差是 0.01,这个数非常小.但 1000 和 998 也是非常接近的,它们之间的差是 2,这是一个比 0.01 大很多的数.但是,比值 $998 : 1000 = 0.998$ 是非常接近于 1 的.所以有时候应该通过两个数的**比值**与 1 有多接近来衡量“接近程度”.依照这样想的话,我们就不会说 0.1 和 0.0001 很接近了.虽然这两个数都非常小,它们的差也很小,但它们的比值是 1000,这个数可不小.在附图 6.1 中,当 α 很小时,不仅仅是 $\sin \alpha$ 很小,而且这两个数确实很接近,因为它们的比值是接近于 1 的.

一点的结论.在后文中我们将会看到,对于以弧度制表示的一个很小的角 α ,比值 $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ 非常接近于 1.比如,对于 $\alpha = 0.1$, $\sin \alpha$ 大于 α 自身的 99%.

弧度值和三角比也很搭配.我们已经看到了对于很小的角, $\sin x$ 接近于 x .事实上,它更接近于 $x - \frac{x^3}{6}$,后者是一个非常优秀而又简单的逼近.我们甚至可以证明其误差不超过 $\frac{x^5}{120}$,这对于比较小的角而言,是一个极其微小的数.

当然上面说的只有当我们对 x 使用弧度值时才成立.如果用度数制,就像我们前面看到的那样,这个公式将会变得非常糟糕.

的确,最好的角都有一个包含数字 π 的弧度值.我们承认有时候数字 π 比较难处理,因为它是一个无理数,而数字的十进制体系无法给它一个简单的记号^①(这是我们使用希腊字母的原因).但对于以英语为母语的人而言,把英里转化成千米或者把镑^②转化成千克比它更不方便.所以不要让这点轻微的不便阻止了你使用弧度制.



练习

1. 使用计算器,填写附表 6.1(当然,表格中的第二列和第三列都将是近似值).

2. 不使用计算器,给出 $\sin 0.00123456$ 的值的一个估计.这个估计是大了还是小了?在回答这个问题后,用你的计算器验算一下.

① 数字 π 是两个很自然出现的无理常数之一.另一个是 e ,它大约等于 2.71828,也是一个无理数.就如数字 π 天然地出现于几何学中一样,数字 e 也是天然地出现于微积分中.大约 250 年前,人们发现这两个数可以由一个非常不同寻常的公式 $e^{ix} = -1$ 联系起来.

② 1 磅 = 0.454 千克.

附表 6.1

α (弧度)	α (度数)	$\sin \alpha$
1	57.29578	
0.5		
0.2		
0.1		
0.01		
0.02		
0.001		
0.002		
0.005		

3. (1) 使用计算器,填写附表 6.2.

附表 6.2

α	$\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$	$\sin \alpha$
1		
0.5		
0.2		
0.1		
0.05		
0.01		
0.001		

(2) 上面的表格显示了当 α 很小而且是以弧度值表示时, $\sin \alpha$ 约等于 $\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$. 当 D 是一个以度数值表示的很小的角时, 写出 $\sin D$ 的相应的近似值表达式. 你的近似公式应该是一个以 D 为变量的表达式. 然后用 $D=1^\circ$ 验证你的表达式.

4. 上述估计的误差总是小于 $\frac{\alpha^5}{120}$. 如果角度是用度数值而不是用弧度值, 最大可能的误差是多少?

5. 用计算器求出对于哪些弧度值 x , 总有 $\frac{x^5}{120} < 0.001$.

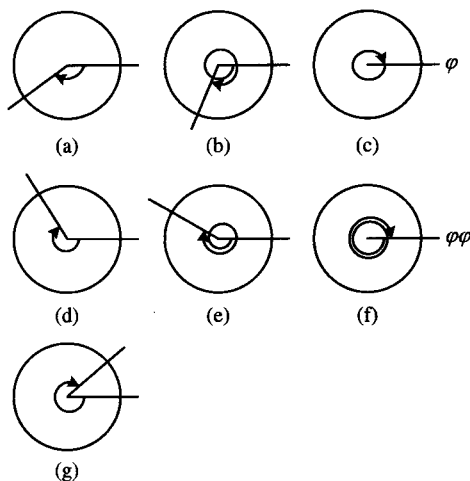
6. 我们已经论述了公式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

该公式将会在微积分中被证明. 你能否猜一猜这个近似表达式的下一项是什么?

你如果能猜到, 就会得到这样一个公式, 它对于较小的 x 所给出的 $\sin x$ 值的正确位数比大部分计算器所能显示的位数还要多!

7. 在 2096 年, 一艘太空舱降落到地球上, 舱内有一些来自远方外星文明的工艺品. 附图 6.2 是在太空舱里发现的某些图形.



附图 6.2

专家们相信这幅图展示了外星人怎么测量角度的. 请尽可能多地陈述出该外星文明的角度测量体系. 你认为符号 φ 表示什么?

8. 下面每个角分别在哪个象限?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 1000 (这些都是弧度), 1000° .

9. 假设你对于弧度值为 1, 2, 3, 4, $\dots$, 100 的角都回答了上面这个问题. 你觉得这些角落在第一象限的比例是多少? 第二象限呢? 第三象限呢? 第四象限呢?

解 你可以猜到每个象限中都有大约 $\frac{1}{4}$ 的角——这些角没有理由会更“偏爱”留在某个特定的象限.事实上,这个猜测是正确的.它是高等数学中**遍历定理**的一个特例.如果你对于弧度值为 $1, 2, 3, \dots$ 直至 1000 的角回答上述问题,你的估计将更接近于每个象限占 $\frac{1}{4}$.

第 7 章

加 法 公 式

7.1 更多的恒等式

接下来我们要学习的是关于正弦和余弦函数的一个重要而基本的性质. 即如果知道 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值, 以及 $\sin \beta$ 和 $\cos \beta$ 的值, 那么我们就可以算出 $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ 和 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

$\sin(\alpha + \beta)$ 有可能很简单. 说不定就是等于 $\sin \alpha + \sin \beta$. 通过令 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ 来测试一下我们的猜想. 此时 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$, 而 $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$. 因为这两个值不相等, 所以我们的猜测是错误的.



练 习

1. 完成表 7.1.

表 7.1

α	β	$\sin \alpha$	$\sin \beta$	$\sin \alpha + \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta)$
60°	30°				
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$				
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$				

2. 注意对哪些 α 和 β 的值, $\sin(\alpha + \beta)$ 不等于 $\sin \alpha + \sin \beta$. 在每种情况下, 哪个表达式的值更大?

3. 对于角 $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$, 算一算下面哪些式子是正确的, 哪些是不正确的.

$$(1) \sin \alpha + \sin \beta = \sin(\alpha + \beta);$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin \beta;$$

$$(3) \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$$

4. (1) 图 7.1 显示了一个直径 $AC = 1$ 的圆. 在图中找出一条长度等于 $\sin \alpha$ 的线段和一条长度等于 $\sin \beta$ 的线段.

(2) 图 7.2 所示的是与上面一样的圆. 它的直径依然是 1, 但 AC 不再是直径. 角 α 和 β 还是和前面一样的锐角. 在图中找出长度分别等于 $\sin \alpha$ 和 $\sin \beta$ 的线段.

5. 回忆一下 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 和 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$. 注意这两个值都大于 $\frac{1}{2}$. 不用做很多计算, 你怎样由此而断定 $\sin 45^\circ + \sin 60^\circ$ 不可能等于 $\sin 105^\circ$, 虽然 $45 + 60 = 105$?

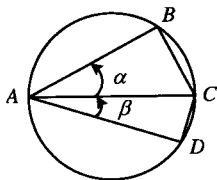


图 7.1

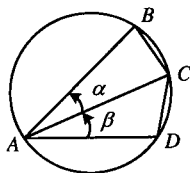


图 7.2

7.2 加法公式

迄今为止, 我们所做的大部分事情都是为熟悉的对象取一个新的名字. 但接下来我们将探讨关于正弦和余弦的加法公式:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

从某种意义上来说, 它们是正弦和余弦函数能够广泛应用于物理以及数学中的关键原因.^①

① 正弦和余弦的这些应用并不是它们最早的应用. 公元 2 世纪, 天文学家托勒密(Ptolemy)就已经在用这些加法公式了, 虽然他并没有使用我们现在所用的正弦和余弦这两个名字. 作为一个天文学家, 他需要与之等价的观念去定位行星与恒星, 并描述它们的周期运动.

对于差,也有两个相关的公式:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$



练习

1. 令 $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$, 验证上述公式.

2. 验证上述公式对于 $\alpha = 0$ 以及任意 β 值都是正确的(即使不是很有启发意义). 当 $\beta = 0$ 时, 又如何呢?

[注意: 你要是忘记了公式的具体表达式, 可以快速地看一看当 $\beta = 0$ 时, 结果如何. 比如, $\sin(\alpha + 0)$ 的公式应该给出 $\sin \alpha$ 的值.]

3. 当 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 时, 验证 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 的公式.

(提示: 假设 α 和 β 是同一个直角三角形中的两个锐角, 然后比较 $\sin \alpha$ 和 $\cos \beta$.)

4. 验证加法公式在 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ 时成立.

5. 用上面的公式验证 $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$. 也就是说, 验证 $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 = 1$.

6. 用正文中给出的公式证明 $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$. 也就是说, 证明

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

7.3 加法公式的证明

7.2 节的练习题已经说明了我们提出的加法公式和减法公式是合理的. 但我们在计算时, 必须要给出一个证明.

首先对于 α, β 和 $\alpha + \beta$ 都是锐角的情形, 证明 $\sin(\alpha + \beta)$ 的加法公式. 我们将需要两个直角三角形, 其

中一个含有一个锐角 α , 另一个含有一个锐角 β , 如图 7.3 所示.

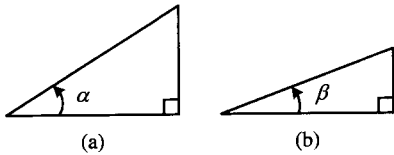


图 7.3

我们必须以某种方式把这两个三角形放在一起, 使得所得到的图形含有一个等于 $\alpha + \beta$ 的角(我们假定了该角也是锐角). 为了让它们有一条公共边, 我们只有三种方式能做到这一点(图 7.4):

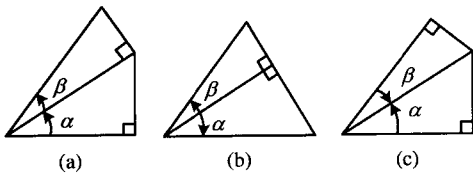


图 7.4

这里的每个图都能给我们有关 $\sin(\alpha + \beta)$ 公式的一个不同的漂亮证明. 下面我们探讨前两个图[图 7.4(a), (b)]. 我们把第三个图[图 7.4(c)], 其实也是最有意思的一个, 推迟到后文中另一个场合(见本章的附录).

7.4 第一个漂亮证明

从图 7.4(a) 开始, 让我们把三角形的各条边按照图 7.5 所示标记, 则 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{e}{d}$. 我们需要表示出图中的 $\sin(\alpha + \beta)$.

作垂线 DQ 垂直于标有 b 的线段(图 7.6), 现在我们可以写出

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{DQ}{d}.$$

DQ 虽然与 $\sin(\alpha + \beta)$ 有关, 但与表示 $\sin \alpha$ 和 $\sin \beta$ 的比无关. 为了建立这样一个关系, 我们用从点 B 出发的垂线

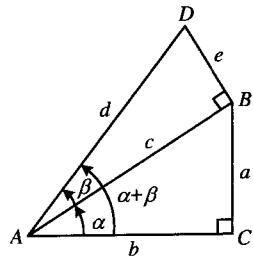


图 7.5

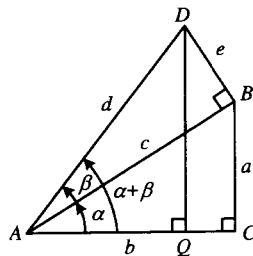


图 7.6

将 DQ 分成两个部分,如图 7.7 所示.于是有

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{p+q}{d} = \frac{p}{d} + \frac{q}{d} = \frac{p}{d} + \frac{a}{d}.$$

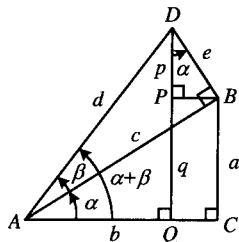


图 7.7

现在我们需要把 $\frac{p}{d}$ 和 $\frac{a}{d}$ 与 $\sin \alpha$ 以及 $\sin \beta$ 联系起来.我们从第二个分式开始.线段 a 位于三角形 ACB 中,而线段 d 位于三角形 ABD 中.我们通过引入 c (因为 c 同时位于这两个三角形中),将分数 $\frac{a}{d}$ 与这两个三角形联系起来:

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{d} = \sin \alpha \cos \beta.$$

处理分式 $\frac{p}{d}$ 要稍微难一点点.因为线段 d 位于三角形 ABD 中(其中包含角 β),而线段 p 位于三角形 DPB 中.但幸运的是,后面的三角形含有一个等于 α 的角,即 $\angle PDB$ ^①.现在我们用线段 e 作为媒介,可以得

$$\frac{p}{d} = \frac{p}{e} \cdot \frac{e}{d} = \cos \alpha \sin \beta.$$

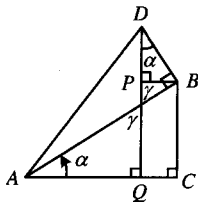
把这些结合在一起,我们就得到

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{d} + \frac{p}{e} \cdot \frac{e}{d} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

练习

1. 我们还可以用同样的图形(图 7.7)导出 $\cos(\alpha + \beta)$ 的公式,其中 α, β 和 $\alpha + \beta$ 都是锐角.令 $AQ = q, CQ = r$.把下面证明中跳过的步骤都补上.

① 如果你没有立即看出来为什么 $\angle PDB = \angle BAC = \alpha$,请看一看下面的图.你会发现 $\angle BAC$ 和 $\angle PDB$ 都和图中标有 γ 的角互为余角,从而它们相等.



$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + \beta) &= \frac{AQ}{AD} \\
 &= \frac{AC - QC}{AD} \\
 &= \frac{AC}{AD} - \frac{BP}{AD} \\
 &= \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AD} - \frac{BP}{BD} \cdot \frac{BD}{AD} \\
 &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.
 \end{aligned}$$

注意：

(1) 这里我们用了两个不同的“媒介”：对第一个比，用的是 AB ；对第二个比，用的是 BD 。同样，每个媒介都在两个不同的三角形中充当两种不同的角色。

(2) 线段 QC 出现的时候带了一个负号，这就是最终的公式是一项减去（而不是加上）另一项的缘故。

2. 利用图 7.8 导出用 $\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha$ 和 $\cos \beta$ 表示 $\sin(\alpha - \beta)$ 和 $\cos(\alpha - \beta)$ 的公式，其中假定 α, β 和 $\alpha - \beta$ 都是正的锐角。

下面是需要导出的公式：

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.
 \end{aligned}$$

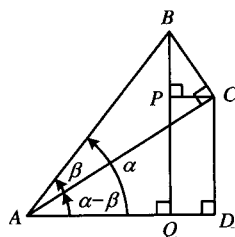


图 7.8

7.5 第二个漂亮证明

在第二个证明中，我们将使用 4.7 节的如下定理：

定理 三角形的面积等于两边边长之积乘以其夹角正弦的一半。

在图 7.4(b) 中，我们有两个直角三角形，其中一个含有一个锐角 α ，另一个含有一个锐角 β 。若把它们拼在一起，使之有一条公共边，则我们将得到一个有一个角等于 $\alpha + \beta$ 的新三角形，如图 7.9 所示。

在这个新三角形中，两个直角三角形的公共边是一条高，在图中标记为 h 。原来的每条斜边都是新三角形的一条边，在图中标记为 c_1 和 c_2 。

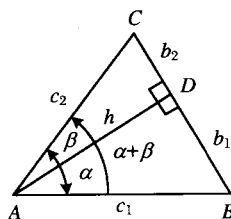


图 7.9

上面的定理告诉我们,新三角形的面积是

$$S = \frac{1}{2} c_1 c_2 \sin(\alpha + \beta).$$

我们用初等几何的方法再计算一下这个三角形的面积. 比较一下两个结果就会得出我们要证的公式.

记 $BD = b_1$, $DC = b_2$. 在直角三角形 ABD 中, 我们有

$$\frac{b_1}{c_1} = \sin \alpha.$$

故 $b_1 = c_1 \sin \alpha$. 类似地, 在直角三角形 ACD 中, $b_2 = c_2 \sin \beta$. 同理, $h = c_1 \cos \alpha$ (根据直角三角形 ABD), $h = c_2 \cos \beta$ (根据直角三角形 ADC).

利用这些关系, 我们可以把三角形 ABC 的面积^① 表示成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AD \cdot BC &= \frac{1}{2} h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2} hb_1 + \frac{1}{2} hb_2 \\ &= \frac{1}{2} c_2 \cos \beta \cdot c_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} c_1 \cos \alpha \cdot c_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

把关于三角形 ABC 面积的两个表达式等同起来, 我们将得到

$$\frac{1}{2} c_1 c_2 \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} c_1 c_2 \cos \beta \sin \alpha + \frac{1}{2} c_1 c_2 \cos \alpha \sin \beta.$$

最后, 把两边同除以 $\frac{1}{2} c_1 c_2$, 将得出我们想要的结果. 注意: 即使 $\alpha + \beta$ 不是锐角, 这个证明也是成立的 (但 α 和 β 需是锐角).



练习

1. 若 $\alpha = 30^\circ$ 且 $\beta = 30^\circ$, 我们的公式对于 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 能够给出什么值? 这些值与你已经知道的值是否吻合?

2. 若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 且 $\sin \beta = \frac{5}{13}$, 对于 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 我们的公式能够给出什么值?

① 记住三角形的面积等于任意一条高与相应的底边乘积的一半.

3. 证明 $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 和 $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

4. 用(类似于第3题的)根式给出 $\sin 15^\circ$ 和 $\cos 15^\circ$ 的值. 解释所出现的巧合.

5. (1) 假设 α 和 β 都是锐角, $\cos(\alpha + \beta)$ 能否等于 0?

(2) 假设 α 和 β 都是锐角, $\sin(\alpha + \beta)$ 能否等于 0? (注意: 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 都不算锐角.)

(3) 我们知道若 α 和 β 都是锐角, 那么 $\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha$ 和 $\cos \beta$ 都是正数. 对于锐角 α 和 $\beta, \sin(\alpha + \beta)$ 是否一定是正数? $\cos(\alpha + \beta)$ 是否一定是正数?

6. 乐乐打算证明恒等式

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$$

他是这样论证的:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

你觉得他的论证有什么问题?

7. 在计算器中, 对于 $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ 验证第6题中的恒等式. 你会发现, 尽管乐乐的证明是似是而非的, 但上述恒等式对于这两个值而言是正确的. 这是一个巧合吗?

8. 证明 $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$

9. 证明 $\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta).$

10. 不使用计算器, 求出 $\sin 18^\circ \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ$ 的值.

11. (1) 不使用计算器, 努力求出 $\sin 113^\circ \cos 307^\circ + \cos 113^\circ \sin 307^\circ$ 的值.

(2) 现在用你的计算器检验一下答案.

(3) 在计算(1)时, 你有没有使用加法公式? 记住我们只对正的锐角证明了加法公式. 看起来它们对更大的角也成立, 对不对?

12. 化简表达式 $\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha \sin \alpha.$

13. 化简表达式 $\sin(\alpha + \beta) \sin \beta + \cos(\alpha + \beta) \cos \beta.$

14. 化简表达式

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}.$$

15. 对于任意满足 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 的角, 证明

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha).$$

16. 对于任意锐角 α 和 β , 证明

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1 - \tan \alpha \tan \beta.$$

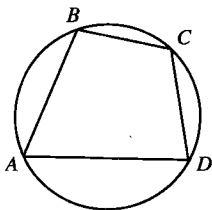
17. 利用余弦定律和第二种漂亮证明中所作的图, 给出 $\cos(\alpha + \beta)$ 的公式的一个直接推导.

附录 托勒密定理及其与加法公式的关系

在这个附录中我们将会探讨 $\sin(\alpha + \beta)$ 的公式和托勒密的一个著名几何定理之间的关系.

附录 1 圆内接四边形的角

托勒密定理是关于圆内接四边形的. 假设我们有一个四边形 $ABCD$, 而我们想把它内接到一个圆内. 这并不总是可行的. 事实上, 如果存在这样一个圆, 那么 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = \pi$.^①



附图 7.1

事实上, 如附图 7.1 所示, $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{BCD}$, 而 $\angle C = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$, 故 $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\widehat{BCD} + \widehat{BAD}) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$. 同理 $\angle B + \angle D = \pi$.

我们也可以证明这个条件是充分的: 若一个四边形的对角是互补的, 那么这个四边形就可以被内接到一个圆内.

为了证明这一点, 我们取一个满足 $\angle B + \angle D = \pi$ 的四边形 $ABCD$, 然后过点 A, B 和 C 作一个圆(我们知道任何不共线的三点都在一个圆上).

然后我们可以证明点 D 也在这个圆上. 事实上,

① 原文误作 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \pi$.

$\angle B = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ (那段不包含点 B 的圆弧), 故 $\widehat{ABC} = 2\pi - \widehat{AC} = 2\pi - 2\angle B$. 证明点 D 就在这个圆上, 只要证明 $\angle D = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$ (见第 3 章的附录 3). 但这确实是对的, 因为 $\frac{1}{2} \widehat{ABC} = \pi - \angle B = \angle D$.

所以我们有如下结果:

定理 一个四边形能够被内接到一个圆里, 当且仅当它的对角是互补的.

附例 7.1 假设我们想要把一个平行四边形内接到一个圆内. 上面的结果告诉我们, 它的对角必须是互补的, 所以这个平行四边形必须是一个长方形. 于是它的对角线的交点将是该圆的圆心, 而对角线长度的一半就是该圆的半径.

附录 2 圆内接四边形的边

附录 1 的定理通过其内角刻画了可内接于圆的四边形. 托勒密定理则通过其各边的长度来刻画它们.

一个四边形有四个顶点, 所以各对顶点之间可以决定六个长度. 这些长度中有四个是该四边形的边, 而另两个是四边形的对角线. 托勒密定理将使用这六个长度来告诉我们这个四边形能否被内接到一个圆内.

托勒密定理 一个四边形可以被内接到一个圆内, 当且仅当其对角线的乘积等于它的两组对边乘积之和.

也就是说, 四边形 $ABCD$ 可以被内接到一个圆内, 当且仅当 $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$.

附例 7.2 对于长方形, 托勒密定理能够告诉我们什么? 我们知道长方形是可以内接到圆里的.

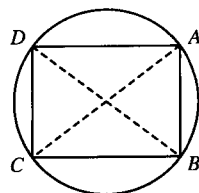
记长方形为 $ABCD$, 那么有

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD,$$

即

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

也就是说, 这种情形下的托勒密定理就归结到了勾股定理.

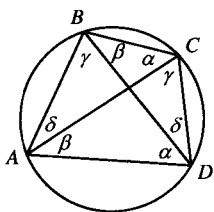


附图 7.2

我们不会在这里给出托勒密定理的几何证明. 但是,

我们将会证明它等价于 $\sin(\alpha + \beta)$ 的加法公式.

托勒密定理涉及四边形的边, 而三角函数处理的只是角. 所以第一件事情就是使用角度重新表述托勒密定理. 如附图 7.3 所示, 取一个内接于直径为 1 的圆的四边形.



附图 7.3

我们知道在这样一个圆里, 一段弦的长度等于它对应的圆周角的正弦 (见第 3.12 节). 观察图中的圆周角, 我们可以发现很多对相等的角. 它们在图中被标上了相同的希腊字母.

假如有四个点 A, B, C, D , 那么我们就可以把它们用三种不同的方式分成两对:

$$AB \quad CD$$

$$AC \quad BD$$

$$AD \quad BC$$

每一对点确定一个长度. 若取出这些长度的乘积, 那么托勒密定理说的是存在一个经过这四个点的圆, 当且仅当这些乘积中的某两个之和减去第三个等于 0. 类似地, 若我们有 n 个点, 那么它们都落在同一个圆上的一个必要且充分条件是托勒密定理的条件对这些点中的任意四个都成立.

现在我们可以把四边形的四条边的长度“翻译”成三角函数表达式了, 即

$$AB = \sin \alpha, \quad BC = \sin \delta,$$

$$CD = \sin \beta, \quad DA = \sin \gamma.$$

那么对角线是什么呢? 对角线 BD 对应的是 $\angle BAD$, 而 AC 对应的是 $\angle ABC$, 所以有

$$BD = \sin(\delta + \beta) = \sin(\gamma + \alpha),$$

$$AC = \sin(\alpha + \delta) = \sin(\beta + \gamma).$$

现在我们可以把托勒密定理写成三角函数的形式:

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD,$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \delta = \sin(\beta + \gamma) \sin(\alpha + \delta).$$

让我们换个方式看这件事情. 如果有四个角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 满足 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, 那么我们就可以把一个直径为 1 的圆分成长度分别为 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ 的四段弧, 然后用这个圆重构附图 7.3. 因为所得到的四边形是内接于圆的, 所以我们就得到:

托勒密恒等式 若 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, 那么 $\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \delta = \sin (\alpha + \gamma) \sin (\beta + \gamma)$.

这个断言等价于托勒密定理的一半: 若一个四边形可以被内接到一个圆里, 那么其对角线的乘积等于两组对边乘积之和.

托勒密定理比通常的 $\sin (\alpha + \beta)$ 的加法公式更一般一点, 而且看起来更漂亮一些, 因为它只用到了正弦, 没有余弦.

附录 3 托勒密恒等式蕴含了正弦的加法公式

$\sin (\alpha + \beta)$ 的公式与这个有什么关系呢? 它是托勒密恒等式的一个特殊情形. 事实上, 假设在四边形 $ABCD$ 中, $\alpha + \delta = \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. 那么 $\sin (\beta + \gamma) = 1$, 而且因为 $\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}$, 故有 $\sin \delta = \cos \alpha$. 又由于 $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, 故有 $\sin \beta = \cos \gamma$. 因此在这个特殊情形里, 托勒密恒等式归结为

$$\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma = 1 \cdot \sin (\alpha + \gamma),$$

而上式正是通常的加法公式. 因此托勒密定理蕴含了托勒密恒等式, 从而蕴含了正弦函数的加法公式.

附录 4 加法公式蕴含了托勒密恒等式

假设我们知道 $\sin (\alpha + \beta)$ 和 $\cos (\alpha + \beta)$ 的加法公式, 下面展示一下怎样用它们来证明托勒密恒等式.

在托勒密恒等式里, 每一项都是两个正弦的乘积. 为了从加法公式导出这个恒等式, 我们需要把这些乘积转化成求和. 请读者们用 $\cos (x \pm y)$ 的公式验证

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)], \quad (7.1)$$

并回想一下

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha. \quad (7.2)$$

我们用上述公式来证明托勒密恒等式.

想要证明: 如果 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, 那么

$$\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \delta = \sin (\beta + \gamma) \sin (\alpha + \gamma).$$

上式右边是两个正弦的乘积, 我们使用公式 (7.1) 将它转化成余弦的和:

$$\begin{aligned}
& \sin(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \gamma) \\
&= \frac{1}{2}\{\cos[(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma)] \\
&\quad - \cos[(\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma)]\} \\
&= \frac{1}{2}[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)].
\end{aligned}$$

我们必须对表达式 $\alpha + \beta + 2\gamma$ 做点处理. 由 $\alpha + \beta + 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \gamma - \delta = \pi + \gamma - \delta$, 根据公式 (7.2), 有 $\cos(\alpha + \beta + 2\gamma) = \cos(\pi + \gamma - \delta) = -\cos(\gamma - \delta)$. 所以如果 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, 那么有

$$\begin{aligned}
& \sin(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \gamma) \\
&= \frac{1}{2}[\cos(\beta - \alpha) + \cos(\gamma - \delta)].
\end{aligned}$$

因为余弦函数是一个偶函数, 所以可以把上式写成

$$\begin{aligned}
& \sin(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \gamma) \\
&= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\gamma - \delta)].
\end{aligned}$$

现在让我们看一看托勒密恒等式的左边, 有

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \delta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)].
\end{aligned}$$

如果 $x + y = \pi$, 就有 $\cos y = -\cos x$. 在这里 $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = \pi$, 故 $\cos(\gamma + \delta) = -\cos(\alpha + \beta)$. 于是, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \delta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\cos(\gamma - \delta) + \cos(\alpha + \beta)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\gamma - \delta)].
\end{aligned}$$

上式就是我们求出的与恒等式右边相等的表达式. 所以托勒密恒等式可以由正弦和余弦的加法公式导出.

第 8 章

三角恒等式

8.1 扩大恒等式的范围

让我们回过头来再看看一些三角恒等式. 首先, 注意到 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 对任意锐角 α 都成立. 当我们把 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的定义推广到大于 90° 的角和小于 0° 的角时, 这个恒等式依然是成立的.

我们(在第 7 章中)已经证明

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

对于任意的正锐角 α 和 β 都成立. 这个恒等式是否对任意角都是完全成立的呢?

利用第 5 章的定义, 我们可以看到这个公式对于, 比如 $\alpha = 150^\circ$ 和 $\beta = 300^\circ$, 也是成立的. 而事实上, 它对于任意大小的角总是成立的. 为什么会这样呢?

8.2 解析延拓原理: 高等数学来救场

证明 $\sin(\alpha + \beta)$ 的公式对一般的角都成立是相当乏味的. 你可以用别的角试一试, 把每个正弦或者余弦归结为一个正锐角的函数. 但记得带上午饭, 因为这个过程要花上不短的时间.

对于这个情形, 一个高等数学中的定理前来救场了.

这个定理叫作**解析延拓原理**,它大致是说绝大部分的恒等式在三角函数的新定义下依然是成立的.

更准确地说,解析延拓原理断言:任何一个有关有理三角函数的恒等式,如果它对于所有的正锐角都成立,那么它其实对于任意角都是成立的.

因为这个断言的证明将会涉及一门叫作微积分的课程以及另一门叫作复分析的课程,所以我们在此处就仅仅陈述一下这个原理.但为了理解上述断言,我们必须仔细探究一下几个术语.有理三角函数是一个你可以通过如下过程得到的函数:取各种各样角度的正弦函数、余弦函数,以及所有的常数函数,然后把它们加一加、减一减、乘一乘或者除一除.^①下面是一些有理三角函数的例子:

$$\begin{aligned} & \frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}, \quad \sin(\alpha + \beta), \\ & \frac{2\sin \alpha + 3\cos \beta}{3\sin \alpha - 2\cos \beta}, \quad \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ & \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{2}, \quad \tan \alpha, \\ & \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}. \end{aligned}$$

下面则是一些不是有理三角函数的例子:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin x}, \quad \sqrt{1 - \sin^2 x}, \\ & \sqrt{\sin^2 x - 3}, \quad \log(\sin x), \\ & \cos(\sin x), \quad \frac{\sqrt{\sin x}}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$

你应该对上述的一些例子很熟悉.事实上,你可以检验一下,到现在为止出现的大部分恒等式都只涉及有理三角函数.

解析延拓原理告诉我们:如果两个这样的有理三角函数对于在任意一个给定区间(即在两个实数之间的所有数)里的所有数都相等,那么它们就对所有的数都相等.

比如,在上面列出的有理三角函数中,我们有 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 这两个例子.应用几何学,我们已经证明了(三遍!)这两个函数对于

① 如果你从整数开始,用同样的方法,也就是通过加一加、减一减、乘一乘或者除一除,就可以得到所有的有理数.

$0^\circ < \alpha, \beta < 45^\circ$ (从而 α, β 和 $\alpha + \beta$ 都是锐角) 是相等的. 解析延拓原理就告诉我们这两个函数一定对所有的 α, β 值都相等, 而不是仅仅只对位于 0° 到 45° 这个区间内的角相等.



练习

1. 对于下面的每个函数, 说一说它是不是 $\sin \alpha$ 的有理函数.

(1) $\sqrt{2}\sin \alpha$;

(2) $\sqrt{2\sin \alpha}$;

(3) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}}$;

(4) $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sin \alpha}}$;

(5) $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$;

(6) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

2. 把下面的每个表达式都写成正弦和余弦的有理函数.

(1) $\tan \alpha$;

(2) $(1 + \tan \alpha)(1 - \tan \alpha)$;

(3) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$;

(4) $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$;

(5) $\tan \alpha \cot \alpha$;

(6) $1 + \tan^2 \alpha$.

3. 对于任意位于 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的角 α , 我们知道有 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. 解析延拓原理是否能保证这个断言对所有角都成立? 比如, 这个恒等式对于 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 是否成立?

4. 对于任意位于 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的角 α , 我们知道有 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 解析延拓原理是否能保证这个断言对所有角都成立? 比如, 这个恒等式对于 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 是否成立?

8.3 回到我们的恒等式

你可以想象到,像解析延拓原理这样的一般性断言(事实上该原理的完整陈述还要更一般!)一定是根植于函数的极其深奥的性质之中.事实也确实如此.这就是为什么人们需要先学两门高级的数学课程才能完全理解它.

所以我们可以继续用我们的恒等式干活,而那些证明了解析延拓原理的数学家们则确保了我们的工作对任意大小的角度都是成立的,而不仅仅是对正锐角成立.

在这里再一次列出我们的恒等式.把它们重复一遍是为了强调一下它们有新增的含义.因为解析延拓原理,这些公式对任意角度都是成立的,而不仅仅是对正锐角成立.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$



练习

1. 若 α 和 β 是满足 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 和 $\sin \beta = \frac{5}{13}$ 的锐角,求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值. $\alpha + \beta$ 位于哪个象限?
2. 若 α 和 β 是满足 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 和 $\sin \beta = \frac{12}{13}$ 的锐角,求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值. $\alpha + \beta$ 位于哪个象限?
3. 若 α 和 β 是满足 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 和 $\sin \beta = \frac{5}{13}$ 的角,求 $\sin(\alpha + \beta)$. (注意我们并没有限定 α 和 β 是锐角.) 共有多少种可能的答案?
4. 对于以下角,验证 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

$$(1) \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{3\pi}{4};$$

$$(3) \alpha = -\frac{\pi}{6}, \beta = \frac{3\pi}{2}.$$

$$5. \text{ 证明 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{3}{2}.$$

$$6. \text{ 证明 } \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y.$$

$$7. \text{ 化简 } \cos(x+y) + \cos(x-y).$$

$$8. \text{ 证明 } \cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y.$$

$$9. \text{ 证明 } \sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y.$$

10. 使用上面两个练习题, 证明

$$\begin{aligned} \cos(x+y) \cos(x-y) - \sin(x+y) \sin(x-y) \\ = \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned}$$

注意左边既依赖于 x 也依赖于 y , 而右边只依赖于 x .

[注记: 我们可以用另一种方法化简

$$\cos(x+y) \cos(x-y) - \sin(x+y) \sin(x-y).$$

记 $A = x + y, B = x - y$, 我们有 $\cos(x+y) \cos(x-y) - \sin(x+y) \sin(x-y) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$. 但这个就是 $\cos(A+B)$. 由于 $A+B = (x+y) + (x-y) = 2x$, 因此

$$\begin{aligned} \cos(x+y) \cos(x-y) - \sin(x+y) \sin(x-y) \\ = \cos 2x. \end{aligned}$$

我们再一次看到表达式

$$\cos(x+y) \cos(x-y) - \sin(x+y) \sin(x-y)$$

不依赖于 y .]

11. 现在有一点点不一致了. 从第 10 题可以知道, 我们所感兴趣的表达式等于 $\cos^2 x - \sin^2 x$. 而在题目的注记里, 我们发现它等于 $\cos 2x$. 这里是不是有问题呢? 请证明没有错误.

12. 证明 $\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$ 不依赖于 β .

8.4 $\tan(\alpha + \beta)$ 的一个公式

下面来证明 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$. 我们先用加法公式写出

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.\end{aligned}$$

接下来我们把分子和分母同除以 $\cos \alpha \cos \beta$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

从某种意义上来说, 这个公式比我们关于 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 的公式更漂亮, 因为它只涉及 α 和 β 的正切. 另一方面, $\sin(\alpha + \beta)$ 的公式不仅用到了 $\sin \alpha$ 和 $\sin \beta$, 还用到了 $\cos \alpha$ 和 $\cos \beta$.



练习

1. 验证 $\tan(\alpha + \beta)$ 的公式对于 $\alpha = \frac{7\pi}{6}, \beta = \frac{5\pi}{3}$ 成立.
2. 求出用 $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 表示 $\tan(\alpha - \beta)$ 的公式.
3. 证明

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}.$$

4. 证明

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}.$$

5. 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 证明 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$.

6. 写出 $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$ 的一个仅仅用到 $\tan \alpha, \tan \beta$ 和 $\tan \gamma$ 的表达式.

7. 利用第 6 题的结果, 或以其他方式, 证明如果 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (比如, 它们是一个三角形的三个内角), 则 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$.

8. 证明 $\tan \alpha \tan 2\alpha \tan 3\alpha = \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha$ 在式中各表达式都有定义时总是成立的. 对于哪些 α 的值, 其中的有些表达式是没有定义的?

8.5 倍角公式

如果知道 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$, 我们就可以求出 $\sin 2\alpha$ 和 $\cos 2\alpha$.

我们知道

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

和

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

令 $\alpha = \beta$, 于是我们得到

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2\sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

$\cos 2\alpha$ 的公式特别有意思. 因为 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, 所以我们可以写出 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

类似地, 因为 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, 所以我们可以写出 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. 读者们请自行验证以上公式.

所以我们就有四个漂亮而实用的公式:

$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha.\end{aligned}$

例 8.1 若 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\cos 2\alpha$.

解 我们有

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}.$$

(读者应该验证一下 $\cos 2\alpha$ 的另外两个公式也可以给出同样的答案.)

例 8.2 若 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\sin 2\alpha$.

解 因为 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, 所以要想继续算下去, 我们需先算出 $\sin \alpha$. 但 $\sin \alpha$ 不是唯一确定的. (毕竟, 我们并不知道 α 的值, 只知道 $\cos \alpha$ 的值. 同时不止一个角的余弦值等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

为了计算 $\sin \alpha$, 回想一下

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

故

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}.$$

于是

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\pm \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

读者们应该验证一下, 对于我们所得两个值中的任意一个, 确实存在 α 的值使得该答案是正确的. 所以给定 $\cos \alpha$ 的值后, $\cos 2\alpha$ 的值是唯一确定的, 而 $\sin 2\alpha$ 的值则不是. (当然 α 本身的值不是唯一确定的.)

我们常常要用到下面形式的“倍角公式”. 若记 $\alpha = 2\beta$, 则 $\beta = \frac{\alpha}{2}$, 而此时有

$$\sin \beta = 2\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2},$$

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 2\cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{\beta}{2}.$$



练习

1. (1) 若 $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ 且 $\cos \alpha$ 是正的, 求 $\sin 2\alpha$ 和

$\cos 2\alpha$.

(2) 若 $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ 且 $\cos \alpha$ 是负的, 求 $\sin 2\alpha$ 和 $\cos 2\alpha$.

2. 若 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 都是有理数, $\sin 2\alpha$ 可以是无理数吗? $\cos 2\alpha$ 呢? 用正文中给出的例子以及上面的第一题验证你的答案.

3. 在做某个问题时, 一名学生一不小心把 $\cos 2\alpha$ 写成了 $\cos^2 \alpha$. 但是对于他所使用的那个特定的角, 答案最终是正确的. 问此处 α 的值可能是什么? 也就是说, 对于哪些 α 的值, 有 $\cos^2 \alpha = \cos 2\alpha$?

4. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0.2$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

5. 若 $\sin \alpha - \cos \alpha = -0.3$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

6. 证明 $\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos \alpha$.

7. 证明 $\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \sin 4\alpha \cos \alpha - \cos 4\alpha \sin \alpha$.

8. 证明 $\cos^2 \alpha \geq \cos 2\alpha$.

9. 仅用 $\sin \alpha$ 表示 $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2$.

10. 求 $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ 的值.

(提示: 若这个表达式的值是 M , 求 $M \cos 10^\circ$.)

11. 求 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 的值.

12. 证明 $\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

8.6 三倍角

下面求出 $\sin 3\alpha$ 和 $\cos 3\alpha$ 的公式.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin (2\alpha + \alpha) \\&= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\&= 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha \\&= 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha \\&= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

(读者们应该验证一下计算过程.)

用同样的方法, 可以算出

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$



练习

1. 完成上面所给出的 $\cos 3\alpha$ 公式的推导.
2. 若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin 3\alpha$ 可能的值是哪些? $\cos 3\alpha$ 呢?
3. 若 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin 3\alpha$ 可能的值是哪些? $\cos 3\alpha$ 呢?
4. 导出两个 $\cos 4\alpha$ 的公式:
 - (1) 要求只用到 $\cos \alpha$;
 - (2) 要求只用到 $\sin \alpha$.
5. 证明 $\sin 3\alpha \cos \alpha - \cos 3\alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$.
6. 证明对于任意角 α , 都有

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2.$$
7. (1) 证明 $\sin 3\alpha = 4\sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$.
 (2) 证明 $\cos 3\alpha = 4\cos \alpha \cos(60^\circ + \alpha) \cos(60^\circ - \alpha)$.
8. 导出用 $\cos \alpha$ 表示 $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$ 比值的公式.
9. 证明 $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha = \cos^3 2\alpha$.

8.7 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 和 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的公式的推导

接下来导出用 α 的三角函数表示 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 和 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的公式.

首先从用 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 表示 $\cos \alpha$ 的公式(见 8.5 节最后)开始:

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

这个公式可以被改写成 $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$, 由此可推出

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

为了得到 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 的公式, 我们继续用类似的方法:

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

即 $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$, 由此可推出

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

为了证明 $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, 我们详细写出

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2} \cdot \frac{2}{1 + \cos \alpha}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

在下一节中, 我们将会看到 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的两个更加好用的公式.



练习

1. 若 $\cos \alpha = 1$, 求 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的所有可能的值. 你会发现共有两个可能的值. 对于每个值, 给出一个取到该值的相应的 α 值.

2. 对于

$$(1) \alpha = 60^\circ, \quad (2) \alpha = 120^\circ, \quad (3) \alpha = 240^\circ.$$

验证上面给出的 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的公式. 在这些角中, 哪些应该取正平方根, 哪些应该取负平方根?

3. 填表 8.1. 注意对于每个给定的 α 值, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

表 8.1

α	α 所在象限?	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限?	$\cos \frac{\alpha}{2}$
780°				
1020°				
1140°				
1380°				
-60°				
-300°				
-420°				
-660°				
-780°				

4. 求 $\sin 15^\circ$ 和 $\cos 15^\circ$ 的根式表达式.

5. 我们导出的每个“半角公式”都有一个三角表达式的平方根. 为什么不用担心“我们正在取某个负数的平方根”这种可能性?

6. 对于正的锐角, 我们可以写出 $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$, 而不必有符号的不确定性. 如果能够对这个表达式应用解析延拓原理, 我们将会(错误地)断言这个没有符号不确定性的结论对任意角都成立. 关于这个恒等式, 是什么让我们不能使用解析延拓原理?

7. 假设角 α, β, γ 满足 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. (比如, α, β, γ 可以是一个三角形的三个角.) 证明:

$$(1) \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = 1.$$

(提示: 注意有 $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \cot \frac{\gamma}{2}$, 从而

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = 1.)$$

$$(2) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

8.8 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的另一个公式

我们证明了

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

也可以把上式写成

$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\&= \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)} \\&= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} \\&= \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} \\&= \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.\end{aligned}$$

所以我们得到了 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的另一个公式, 不带根号, 但有一个不确定的符号. 事实上, 这里有一个小奇迹: 我们不需要加上这个不确定的符号! 看一看解析延拓原理, 你就可以很容易理解这个奇迹.

如果一个角是正的锐角, 也就是介于 0° 和 90° 之间的角, 我们就必须取正号. 换言之, 此时我们有

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (\text{不带不确定的正负号})$$

不像我们一开始用的公式, 这个新公式是一个有理三角表达式, 所以解析延拓原理确保了 this 公式事实上对所有角都成立.



练习

1. 在本题中, 我们直接验证 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ 这一结果. 我们已经证明了 $\sin \alpha$ 是两个特定数字 (即 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 和

$\cos \frac{\alpha}{2}$ 之积的两倍, 而且我们知道 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 是同样两个数的商. 但是任何两个数的积和商总是有同样的符号. 所以 $\sin \alpha$ 和 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 有同样的符号. 为什么可由此马上得到

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

不再有不确定的符号?

2. 证明

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

8.9 积化和差

通过应用 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$ 的公式, 我们还可以得到更多有用的结果. 比如, 我们有

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta.$$

这个简单而又不同寻常的公式说明了两个角的余弦之和可以被写成另外两个角的余弦之积. 我们把它写成下面这个式子就更清楚了:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

所以余弦函数以某种复杂的方式把乘积“转化”成了求和. 你可能知道对数函数也把乘积“转化”成求和, 虽然是以一种十分简单的方式. 事实上, 人们过去曾经惯于使用余弦表, 类似于对数表那样, 通过把乘法转化成加法来做冗长的乘法. 你要是学过复分析, 就会了解三角函数与指数或者对数函数之间的非常深刻的关系.

用同样的方法, 我们可以写出

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta), \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$



练习

1. 证明本节中的最后两个恒等式.

2. 证明 $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{4}$.

3. 证明 $\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

4. 求值:

(1) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$;

(2) $\cos 75^\circ \sin 15^\circ$.

5. 证明对于任意角 α , 有

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha.$$

6. 对于任意三个角 α, β, γ , 证明

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) \\ + \sin(\gamma + \alpha)\sin(\gamma - \alpha) = 0. \end{aligned}$$

7. 对于任意三个角 α, β, γ , 证明

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) \\ + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

8.10 和差化积

有时候把正弦的和或余弦的和转化为乘积是很有用的. 下面一系列的例子展示了怎样做到这一点.

例 8.3 “因式分解” $\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta)$.

解 从加法公式开始:

$$\sin(\gamma + \delta) = \sin \gamma \cos \delta + \sin \delta \cos \gamma,$$

$$\sin(\gamma - \delta) = \sin \gamma \cos \delta - \sin \delta \cos \gamma.$$

把上述两个等式加起来, 得到

$$\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2\sin \gamma \cos \delta,$$

这给出了该表达式“因式分解”后的形式.

例 8.4 一个瓶子和一个软木塞共值 1.10 美元. 瓶子比软木塞贵 1 美元. 问软木塞值多少钱?

解 我们一不小心就会回答瓶子值 1 美元,软木塞值 10 美分,但这是不对的.如果价格是这样的话,瓶子就会只比软木塞贵 90 美分.

代数学能够很快给出正确答案.如果瓶子的价格是 b ,而软木塞的价格是 c ,那么有

$$b + c = 1.1,$$

$$b - c = 1.$$

我们可以通过把上述两个方程相加来解出 b 和 c .于是得到 $2b = 2.1$,即 $b = 1.05$.根据这个结果,我们用上述两个方程中的任意一个都可以算出 c .比如,用第一个方程,我们得到 $c = 1.1 - b = 1.1 - 1.05 = 0.05$.

所以,瓶子值 1.05 美元,而软木塞值 5 美分.

例 8.5 若 $x + y = a$ 且 $x - y = b$,将 x 和 y 分别用 a 和 b 表示出来.

解 利用和前面“瓶子和软木塞问题”一样的做法,我们把这两个方程加起来,得到 $2x = a + b$,于是 $x = \frac{1}{2}(a + b)$.然后,我们可以把两个方程相减而不是相加,得到 $2y = a - b$,所以 $y = \frac{1}{2}(a - b)$.一般地,我们有:

若 $x + y = a$ 且 $x - y = b$,则

$$x = \frac{1}{2}(a + b), \quad \text{且} \quad y = \frac{1}{2}(a - b).$$

请记住这个结果.它在代数学和三角函数的很多应用中都非常有用,而不仅仅是可以用在“瓶子和软木塞问题”里.

例 8.6 将表达式 $\sin \alpha + \sin \beta$ 写成正弦和余弦的乘积形式.

解 有了前一个例子的经验,这个问题就不难解决了.如果可以找到角 γ 和 δ 使得 $\gamma + \delta = \alpha$ 且 $\gamma - \delta = \beta$,那么我们就可以用例 8.3 的公式.而例 8.5 告诉我们怎么找这两个角.只要取

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

把它们代入例 8.3 的结果,我们就可得到一个很有用的公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

我们也可以把 $\sin \alpha - \sin \beta$ 表示成正弦和余弦的乘积. 做法是利用上面找到的使得 $\gamma + \delta = \alpha$ 且 $\gamma - \delta = \beta$ 的角 γ 和 δ , 且写出:

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) = 2 \cos \gamma \sin \delta.$$

我们现在把这个结果用原来的变量 α 和 β 表示出来, 就会发现:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

用同样的办法, 我们可以证明:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$



练习

1. 对于上面最后提到的两个公式, 分别给出详细的推导.

2. 证明 $\cos 70^\circ + \sin 40^\circ = \cos 10^\circ$.

3. 求锐角 α 使得 $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ = \cos \alpha$.

4. 证明 $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$.

5. 证明 $\sin 78^\circ + \cos 132^\circ = \sin 18^\circ$.

6. 证明

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}.$$

7. 若 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 证明:

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$;

(2) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$;

(3) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

8. 对于任意角 α , 证明

$$\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0.$$

9. 对于任意角 α , 证明

$$\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4 \cos^2 \alpha \sin 3\alpha.$$

10. 对于任意角 α, β, γ , 证明

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = 0.$$

11. 对于任意角 α, β, γ , 证明

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \gamma) + \sin(\beta - \gamma) \\ &= 4\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}. \end{aligned}$$

12. 对于任意角 α, β, γ , 证明

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) \\ &+ \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) \\ &= 4\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

附录

附录 1 用 $\tan \frac{\beta}{2}$ 表示 $\sin \beta, \cos \beta$ 和 $\tan \beta$ 的表达式

我们可以用三角函数中的结果得到一些数论里面的结果. 让我们从回顾一些前面得到的结果开始.

附例 8.1 证明 $\tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta}$.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \tan^2 \beta + 1 &= \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + 1 = \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \beta}. \end{aligned}$$

附例 8.2 证明 $\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \tan^2 \beta}$.

证明 这个结果可以由附例 8.1 的结果直接推出.

附例 8.3 若 $\tan \beta = a$, 用 a 表示 $\sin 2\beta$ 的值.

解 我们有

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= 2\sin \beta \cos \beta \\ &= 2\sin \beta \cos \beta \frac{\cos \beta}{\cos \beta} \\ &= \frac{2\sin \beta \cos^2 \beta}{\cos \beta} \\ &= 2\tan \beta \cos^2 \beta \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta},$$

其中最后一行是根据附例 8.2 的结果. 因为 $\tan \beta = a$, 所以我们有

$$\sin 2\beta = \frac{2a}{1 + a^2}.$$

在解答附例 8.3 时, 我们已经发现了一种把 $\sin 2\beta$ 表示成 $\tan \beta$ 的有理函数的方式:

$$\sin 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta}.$$

类似地, 我们可以把 $\cos 2\beta$ 用 $\tan \beta$ 表示出来:

$$\begin{aligned} \cos 2\beta &= \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \\ &= \left(\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \right) \cos^2 \beta \\ &= (1 - \tan^2 \beta) \cos^2 \beta \\ &= \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}. \end{aligned}$$

我们也可以用 $\tan \beta$ 表示 $\tan 2\beta$. 要做这件事, 最简单的方法就是用我们已经导出的关于 $\tan(\alpha + \beta)$ 的公式:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

令 $\alpha = \beta$, 我们发现:

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}.$$

如果令 $\tan \beta = a$, 我们可以写出:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\beta &= \frac{2a}{1 + a^2}, \\ \cos 2\beta &= \frac{1 - a^2}{1 + a^2}, \\ \tan 2\beta &= \frac{2a}{1 - a^2}. \end{aligned}} \quad (8.1)$$

这些都是 a 的有理表达式.



练习

使用公式(8.1)的有理表达式, 验证

$$(1) \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1;$$

$$(2) \tan 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}.$$

附录2 $\sin \beta$, $\cos \beta$ 和 $\tan \beta$ 的单值化

令 $\alpha = 2\beta$, 我们可以把公式(8.1)改写为

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

这些公式被称为**万能公式**, 它们提供了三角函数的一个**单值化**. 也就是说, 它们能够让我们用单个三角函数, 即 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的有理表达式表示所有的三角函数. 所以, 比如说, 如果有一个三角恒等式, 或者一个涉及三角函数的方程, 我们就可以把这些三角函数改写成单个变量的有理函数. 然后这个三角方程或者恒等式就变成了一个代数方程或者恒等式.

虽然单值化在理论上可能很重要, 但是在解决实际问题时它很少能把事情变简单. 然而, 单值化能够在一个几乎完全没有预料到的领域给出一些非常有趣的结果. 我们可以用它来找出**勾股数组**: 方程 $a^2 + b^2 = c^2$ 的自然数解.

我们知道如果数 a , b 和 c 形成一个勾股数组, 那么就存在一个具有直角边 a 和 b 以及斜边 c 的直角三角形. 于是这个三角形的每个锐角都具有有理的正弦值、余弦值和正切值. 比如, 我们都熟知数字 3, 4 和 5 满足 $a^2 + b^2 = c^2$. 我们可以造一个直角边为 3 和 4 而斜边为 5 的三角形. 对于这个三角形中较小的锐角 α , 我们有 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 和 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

把这个过程颠倒过来,我们就可以用万能公式找出其他直角三角形,使得它们角的正弦值、余弦值和正切值都是有理数.如果设 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 是某个有理数,则万能公式告诉我们 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 也都是有理数.然后我们就可以造一个有理边长的直角三角形.把它放大一定的倍数,就可以得到一个边长为整数的直角三角形.这个三角形的边长就组成一个勾股数组.

比如,令

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}.$$

则我们有

$$\sin \alpha = \frac{\frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{12}{13},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{5}{13},$$

$$\tan \alpha = \frac{12}{5}.$$

此时,含有锐角 α 的一个直角三角形是具有边长 $\frac{12}{13}, \frac{5}{13}$ 和 1 的三角形.把各边边长乘以 13,我们就得到一个相似的直角三角形,其边长为 12, 5 和 13.因为它们是一个直角三角形的三边,所以这三个自然数就满足方程 $a^2 + b^2 = c^2$.

让我们在最一般的情况下重复这个过程.设

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{q}.$$

则

$$\sin \alpha = \frac{\frac{p}{q}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{q^2 + p^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$$

所以对应的直角三角形具有有理边长 $\frac{2pq}{q^2 + p^2}, \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$ 和

1, 而对应的具有整数边长的直角三角形, 其边长为 $2pq$, $q^2 - p^2$ 和 $q^2 + p^2$.

练习

1. 若 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$, 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 的值. 这些数可以给我们一个勾股数组吗? 可以给我们一个边长为整数的直角三角形吗?

2. 在上面的公式里令 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{8}$, 可以得到哪个具有整数边长的直角三角形?

3. 验证 $2pq$, $q^2 - p^2$ 和 $q^2 + p^2$ 这三个数满足勾股定理, 并指出哪条边长对应的是斜边.

附录 3 主题及其变体

我们现在回到第 2 章中介绍过的一个主题, 并把它发展得更加完善.

主题 $\sin x \cos x$ 的最大值.

变体 1 找出表达式 $\sin x \cos x$ 的最大可能值.

当然 $\sin x \cos x < 1$, 因为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是至多为 1 (且对于同一个角, 不会同时为 1). 但这是最佳估计吗?

练习

1. 使用计算器, 对下面的 x 值, 求 $\sin x \cos x$ 的值.
 20° , 10° , 5° , 1° , 70° , 80° , 85° , 89° .

2. 不用计算器, 对下面的 x 值, 求 $\sin x \cos x$ 的值.
 30° , 45° , 60° .

变体 2 可能你已经在上面数值计算的例子中注意到一些规律了. 让我们看看数学上是怎么回事.

$\sin x \cos x$ 可以让我们回想起公式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

事实上, $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. 但 $\sin 2x$ 和任意角的正弦一样, 是不超过 1 的. 因此

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

就像我们看到的那样, $\frac{1}{2}$ 在 $x = 45^\circ$ 时得到, 所以这就是我们这个表达式的最大值.



练习

1. 求满足下述方程的所有 x 的值.

(1) $\sin x \cos x = \frac{1}{2};$

(2) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

(3) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

2. 下面的方程中, 哪个没有解?

(1) $\sin x \cos x = 0.4;$

(2) $\sin x \cos x = 0.5;$

(3) $\sin x \cos x = 0.6.$

3. 对于 N 的什么值, 方程

$$\sin x \cos x = N$$

有解? 你会怎样求解?

主题 $\sin x + \cos x$ 的最大值.

变体 1 对于任意 x , 当然有 $\sin x + \cos x < 2$, 因为左边所加的每一项都是至多为 1 (且被加项不能同时为 1). 它的值能够有 $\frac{1}{2}$ 那么大吗? 当然可以: 若 $x = 30^\circ$, 那么 $\sin x = \frac{1}{2}$ 且 $\cos x > 0$, 所以此时 $\sin x + \cos x$ 肯定大于 $\frac{1}{2}$.



练习

1. 验证当 $x = 30^\circ$ 时, $\sin x + \cos x$ 是大于 1 的.

2. 至少找出一个 x 使得 $\sin x + \cos x = 1$.

3. 至少找出一个 x 使得 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

现在让我们从数学的角度考虑这件事情. 注意到 $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$. 因为 $\sin 2x$ 的最大值是 1, 所以 $(\sin x + \cos x)^2$ 的最大值是 2, 从而 $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.



练习

1. $\sin x + \cos x$ 能否等于 1.414?
2. $\sin x + \cos x$ 能否等于 1.415?
3. x 取什么值时, 有 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$?
4. $\sin x + \cos x$ 的最小值是多少? 在 x 取什么值时能达到这个最小值?

变体 2 让我们换一种方式求 $\sin x + \cos x$ 的最大值. 我们把这个表达式与公式 $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$ 比较一下. 在比较的时候, 我们可以用一个小技巧, 把 $\sin x + \cos x$ 写成

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$$

为什么我们要做这么奇怪的事情呢? 答案是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 既等于

$\sin \frac{\pi}{4}$, 也等于 $\cos \frac{\pi}{4}$. 所以我们有

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

因为任意角的正弦值最大是 1, 所以我们发现 $\sin x + \cos x$ 的最大值是 $\sqrt{2}$.



练习

1. x 取什么值时, $\sin x + \cos x$ 可以达到最大值?
2. $\sin x + \cos x$ 的最小值是多少? 什么时候可以达到这个最小值?

变体 3 现在让我们看看表达式 $3\sin x + 4\cos x$. 它的最大值是多少? 这一次, 把这个量平方一下并不能解决问题(试一试!), 所以我们不能使用第一种方法.

我们可以把表达式 $3\sin x + 4\cos x$ 和 $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x$ 比较一下. 虽然数字 3 和 4 也不是同一个角的正弦与余弦, 但是它们让我们想起我们的“好朋友”, 即边长为 3, 4, 5 的直角三角形. 事实上, 这个三角形的较大的锐角, 其余弦值是 $\frac{3}{5}$, 而其正弦值是 $\frac{4}{5}$. 所以, 如果把把这个角记为 α , 我们就可以写出

$$\begin{aligned} 3\sin x + 4\cos x &= 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) \\ &= 5(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) \\ &= 5\sin(\alpha + x). \end{aligned}$$

因此这个表达式的最大值是 5.



练习

1. 在上面的讨论中, α 一定是正锐角吗?

2. $3\sin x + 4\cos x$ 的最小值是多少? 当 x 为多少时这个值能达到?

3. $2\sin x + 7\cos x$ 的最大值和最小值分别是多少?

[提示: 取 $\sqrt{53} = \sqrt{2^2 + 7^2}$, 然后研究 $\sqrt{53}\left(\frac{2}{\sqrt{53}}\sin x + \frac{7}{\sqrt{53}}\cos x\right)$ 的对应问题.]

附录 4 π 的一个近似

我们可以利用半角公式给出数字 π 的一个近似值.

让我们从取 $x = \frac{\pi}{2}$ 时验证关于 $\cos \frac{x}{2}$ 和 $\sin \frac{x}{2}$ 的公式开始. 我们有

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi/2}{2} &= \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

而这个式子,我们已经知道是正确的(注意:在求根号时取的是正号).

类似地,有

$$\sin \frac{\pi/2}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

而这个我们也预料到了.

接下来,让我们算一算 $\cos \frac{\pi}{8}$ 和 $\sin \frac{\pi}{8}$ 的以平方根表示的表达式:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{8} &= \cos \frac{\pi/4}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\ \sin \frac{\pi}{8} &= \sin \frac{\pi/4}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(注意:我们所得到的表达式含有“层层嵌套的平方根”。)



练习

1. 完成下面关于 $\cos \frac{\pi}{16}$ 和 $\sin \frac{\pi}{16}$ 的平方根表达式的推导:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{16} &= \cos \frac{\pi/8}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{8}}{2}} = \dots \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\ \sin \frac{\pi}{16} &= \sin \frac{\pi/8}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{8}}{2}} = \dots \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.\end{aligned}$$

2. 用层层嵌套的平方根表达式填写附表 8.1, 作为指定的三角函数的值. 表中有两个值已经填好.

附表 8.1

α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	
$\frac{\pi}{32}$		$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
$\frac{\pi}{64}$		
$\frac{\pi}{128}$		

我们知道 $\cos 0 = 1$, 而对于非常小的角 (其值的大小非常接近于 0), 它的余弦值也非常接近于 1. 我们取的这列角

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{16}, \quad \dots, \quad \frac{\pi}{2^n}, \quad \dots$$

与 0 越来越近 (逼近到 0). 所以有理由预期下面这列数

$$\cos \frac{\pi}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{8}, \quad \cos \frac{\pi}{16}, \quad \dots, \quad \cos \frac{\pi}{2^n}, \quad \dots$$

也逼近 1. 事实上确实如此. 也就是说, 数列

$$0, \quad \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

逼近 1. 数学家们把这个写为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ 重根号}} = 1.$$

现在让我们看看另外一个数列:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}}, \quad \dots, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}, \quad \dots$$

我们已经看到 (见第 6 章), 对于非常小的角 α , 比值 $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ 是非常接近于 1 的. 所以上面这个序列应该逼近 1.

这件事情的另一种说法就是 $\sin \frac{\pi}{2^n}$ 的值 (对于比较大的 n 值) 趋近于 $\frac{\pi}{2^n}$ 的值, 即

$$2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

的值趋近于 π , 而数学家们实际上已经证明了这一点.

也就是说, 他们(用我们关于 $\sin \frac{\pi}{2^n}$ 的层层嵌套的平方根表达式)已经证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ 重根号}} = \pi.$$



练习

1. 利用计算器或者电脑, 验证下列表达式

$$\frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

...

趋近于 1.

2. 利用计算器或者电脑, 验证下列表达式

$$2^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$2^3 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$2^4 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

...

趋近于 π . 你可能需要好好想一想该怎样安排这些计算.

(π 的值大约等于 3.141592653589793...)

3. 我们知道

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

证明:

$$(1) \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}};$$

$$(2) \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$$(3) \cos \frac{\pi}{48} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}};$$

$$(4) \cos \frac{\pi}{96} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$

通过(使用计算器或者电脑)求这些表达式的值,观察到它们确实是趋近于1的.你能解释为什么吗?

4. 我们可以通过求 $\sin \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{24}, \sin \frac{\pi}{48}, \sin \frac{\pi}{96}$ 等的层层嵌套的平方根表达式,找到另一种 π 的逼近.用一个计算器或者电脑,求下述表达式的值:

$$(1) 12 \sin \frac{\pi}{12} = 6 \sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$(2) 24 \sin \frac{\pi}{24} = 12 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$$(3) 48 \sin \frac{\pi}{48} = 24 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}};$$

$$(4) 96 \sin \frac{\pi}{96} = 48 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$

附录5 三角级数

在这一节用我们学过的恒等式,求三角函数表达式的级数之和.这个问题在后面的学习中将会变得非常重要.

我们首先看看一些纯代数的问题,由此引入一些技巧.

附例 8.4 求和 $x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{100}$.

解 令 $S = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{100}$. 将 S 乘以 x , 得到

$$xS = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{101}.$$

为了让表达式变简单,我们把两式相减,得到

$$\begin{aligned} S - xS &= S(1 - x) = x - x^2 + x^2 - \cdots + x^{100} - x^{101} \\ &= x - x^{101}. \end{aligned}$$

因为相减时大部分项都已消掉,所以我们发现

$$S = \frac{x - x^{101}}{1 - x}.$$

当然,如果你已经知道等比数列求和的一般公式,这个结果一点也不出乎意料.但如果你并不清楚等比数列求和的一般公式,上面其实已经学到了它:一般的情形可以用完全一样的方法得到.

这个技巧的关键在于造出一个可以“裂项相消”的求和式:裂项后的求和式中很多项可以“逐对加起来等于0”.



练习

1. 求和

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

(提示:分母有理化以便可以裂项求和.)

2. 用 n 的表达式表示 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ 的和.

(提示:将每个奇整数表示成两个连续平方数的差.)

3. 求 $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$ 的积.

[提示:把这个积叫作 P ,然后把 P 乘以 $(1 - x)$.]

4. 不使用计算器,求乘积 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 的值.

(提示:把这个积叫作 P ,然后把 P 乘以某个精心选取的角的正弦.)

附录6 三角级数的和

我们要求下面这个级数的和:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

如附例 8.4 那样,我们造出一个可以裂项的求和式.

这里的技巧是乘以 $2\sin \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} 2\sin \frac{x}{2} \cdot S &= 2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x + \cdots \\ &\quad + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx. \end{aligned}$$

现在我们把乘积转化成和差. 你需要回忆一下, 或者验证一下:

$$\begin{aligned} 2\sin A \sin B &= \cos(A - B) - \cos(A + B) \\ &= \cos(B - A) - \cos(B + A) \end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned} 2\sin \frac{x}{2} \cdot S &= 2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x + \cdots \\ &\quad + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \\ &= \left(\cos \frac{1}{2}x - \cos \frac{3}{2}x \right) + \cdots \\ &\quad + \left[\cos \left(n - \frac{1}{2} \right)x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right)x \right] \\ &= \cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right)x, \end{aligned}$$

从而

$$S = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right)x}{2\sin \frac{x}{2}}.$$

有时候如果我们将分子从求和变成乘积, 这个公式会更有用, 即

$$S = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2}x \right) \sin \left(\frac{n}{2}x \right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

这个技巧是非常一般的, 可以用来求角度成**等差数列**的正弦之和或者余弦之和. 通过乘以 $2\sin \frac{\alpha}{2}$, 然后对结果进行裂项求和的方法, 我们可以给出下面这个求和

$$\begin{aligned} S &= \sin x + \sin(x + \alpha) + \sin(x + 2\alpha) + \cdots \\ &\quad + \sin(x + n\alpha) \end{aligned}$$

的一般公式, 即

$$S = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2}\alpha \right) \sin \left(x + \frac{n}{2}\alpha \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

类似地, 对于求和

$$\begin{aligned} S &= \cos x + \cos(x + \alpha) + \cos(x + 2\alpha) + \cdots \\ &\quad + \cos(x + n\alpha) \end{aligned}$$

还可以通过乘以 $2\sin \frac{\alpha}{2}$, 并使用

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

得到它的一般公式, 即

$$S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\cos\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

在下面的练习里, 建议你先用所给提示的方法计算, 然后再直接套用上面的公式来检验你的结果.



练习

1. 求和

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin 99x$$

(提示: 把这个和乘以 $2\sin x$.)

2. 求和

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cdots + \sin\left(x + \frac{99\pi}{4}\right).$$

(提示: 把这个和乘以 $2\sin \frac{\pi}{8}$.)

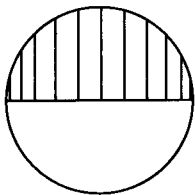
3. 求和

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cdots + \cos 2nx.$$

4. 求和

$$\cos \frac{\pi}{k} + \cos \frac{2\pi}{k} + \cos \frac{3\pi}{k} + \cdots + \cos \frac{n\pi}{k}.$$

5. 附图 8.1 显示了内接在一个圆里的正 24 边形. 图中作了该圆的一条直径, 以及从直径某一侧所有的顶点到该直径的垂线. 求所有这些垂线的长度之和.



附图 8.1

第 9 章

三角函数的图形

三角函数最主要的用处之一在于描述周期过程. 我们在自然界中可以找到很多这样的过程: 单摆的摆动, 海洋的潮汐运动, 一年中白天长度的变化, 等等.

所有这些周期运动都可以用物理学家们均在使用的一簇重要函数来描述. 它们就是形如

$$y = a \sin k(x - \beta)$$

的函数, 其中常数 a 和 k 是正数, 而常数 β 可以是任意实数. 在这一章中, 我们将会描述它们的图形. 我们称这些图形为**正弦曲线**. 因为它们是如此重要, 所以本章将会一步一步地讨论它们, 并依次分析各个参数 a , k 和 β .

9.1 画基础的正弦曲线

对于正弦曲线

$$y = a \sin k(x - \beta),$$

首先考查 $a = 1, k = 1, \beta = 0$ 的情形.

在第 6 章中, 我们画过 $y = \sin x$ 的图像, 如图 9.1 所示.

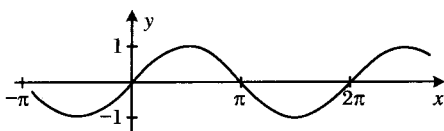


图 9.1

也就是说,我们从情形 $a=1, k=1, \beta=0$ 开始. 回忆一下我们可以求任意实数的正弦(函数 $y=\sin x$ 的**定义域**是全体实数),但所得到的值都是落在 -1 和 1 之间(这个函数的**值域**是 $-1\leq y\leq 1$).

回忆一下我们是怎么得到这个图的. 图 9.2 的左侧是一个单位圆. 点 P 在圆上从标有 A 的点开始, 沿着逆时针方向旋转.

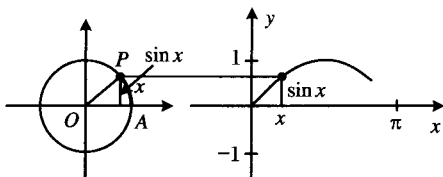


图 9.2

若 x 是弧 AP 的长度, 则 $\sin x$ 是点 P 在竖直方向上的位移. 在右侧, 我们已经记录下了弧 AP 的长度 x . 这条曲线在 x 轴上方的高度就是 $\sin x$.

当角 x 从 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x$ 从 0 增加到 1 ($x = \frac{\pi}{2}$ 的图如图 9.3 所示).

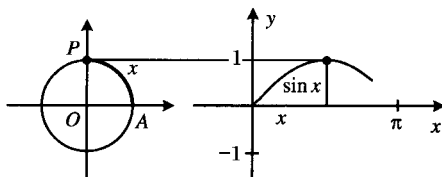


图 9.3

事实上, 这就是我们在作 $y=\sin x$ 的图时所需要的全部信息. 当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π 时, $\sin x$ 的值“**往回**”重复(图 9.4).

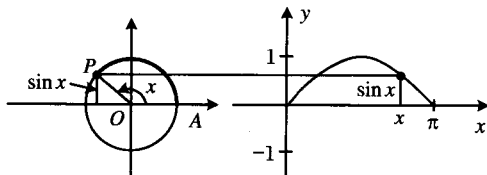


图 9.4

而当 x 从 π 变到 2π 时,所得到的值是前面两个象限的值取负号(图 9.5).

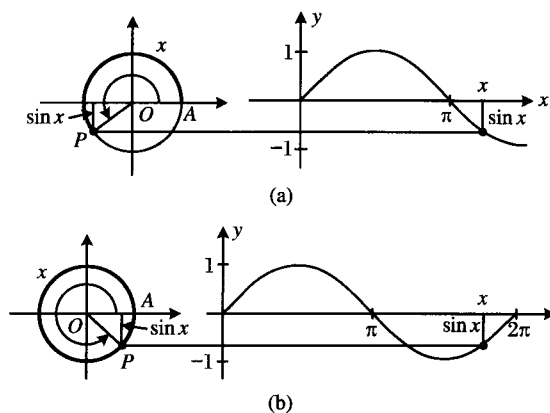


图 9.5

9.2 函数 $y = \sin x$ 的周期

当 x 的值增加到大于 2π 时, $\sin x$ 的值在 2π 长度的区间上重复. 因为这个原因,所以我们说函数 $y = \sin x$ 是周期的,且周期是 2π . 从几何上来看,这意味着如果将整个图形向右或者向左平移 2π 单位,我们将仍然得到同一个图形. 从代数上来看,这意味着

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

对所有数 x 都成立.

定义 我们称函数 f 具有一个周期 p ,是指对于所有使得 $f(x)$ 以及 $f(x + p)$ 都有定义的 x ,都有 $f(x) = f(x + p)$.

函数 $y = \sin x$ 具有一个周期 2π . 你可以验证它也具有周期 $4\pi, 6\pi, -2\pi$, 以及更一般的 $2\pi n$, 其中 n 是任意一个整数. 这并不是一起巧合: 若 $f(x)$ 是一个具有周期 p 的周期函数, 那么对于任意整数 n , $f(x)$ 也是一个具有周期 np 的周期函数. 这就是我们要给出下面这个定义的原因:

定义 周期函数 $f(x)$ 的周期(我们一般把这样的周

期叫做“最小正周期”.) 是对于所有使得 $f(x)$ 以及 $f(x+p)$ 都有定义的 x , 都有 $f(x) = f(x+p)$ 的最小正实数 p .

根据这个定义, 我们可以说 $y = \sin x$ 的周期是 2π .

让我们也画一下函数 $y = \cos x$ 的图像. 用同样的方法, 我们发现它的图像是这样的(图 9.6):

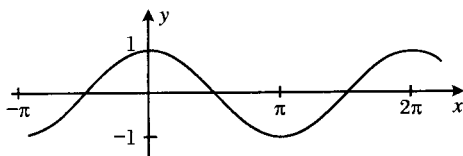


图 9.6

函数 $y = \cos x$ 的周期也是 2π . 后面我们会发现这条曲线可以用形如 $y = a \sin k(x - \beta)$ 的函数来描述.

9.3 其他正弦曲线的周期

接下来考查正弦曲线

$$y = a \sin k(x - \beta)$$

中 $a = 1, \beta = 0, k > 0$ 的情形.

例 9.1 求函数 $y = \sin 3x$ 的周期.

解 这个函数的一个周期是 $\frac{2\pi}{3}$, 因为 $\sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x$. 不难发现这就是最小正周期(比如, 通过看看使得 $\sin 3x = 0$ 的那些 x 值).

例 9.2 作函数 $y = \sin 3x$ 的图像.

解 当 x 从 0 到 2π 时, 函数 $y = \sin x$ 分别取到了某些值. 函数 $y = \sin 3x$ 还是会取同样的这些值, 只不过现在是在当 x 从 0 变到 $\frac{2\pi}{3}$ 时. 因此该函数的一个周期图像如图 9.7 所示.

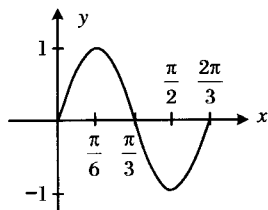


图 9.7

当然, 画好一个周期内的图像, 无论我们想要作出整个图像多大的部分(也取决于我们的纸张大小)都很容易了(图 9.8).

图 9.8 和 $y = \sin x$ 的图像是一样的, 只不过在 x 方向被压缩了一个因子 3. 一般而言, 我们有如下结果:

对于 $k > 1$, 函数 $y = \sin kx$ 的图像可以由 $y = \sin x$ 的图像开始, 在 x 轴方向压缩一个因子 k 而得到.

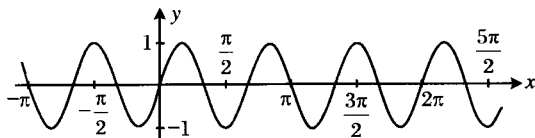


图 9.8

那么 $0 < k < 1$ 会如何呢? 让我们作 $y = \sin \frac{x}{5}$ 的图像. 因为 $y = \sin \frac{x}{5}$ 的周期是 10π , 我们的函数虽与函数 $y = \sin x$ 取完全一样的值, 但被拉伸到了一个更长的周期上(图 9.9):

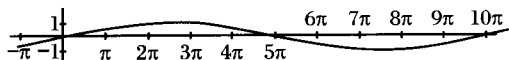


图 9.9

再一次地, 我们有一个一般结果:

对于 $0 < k < 1$, 函数 $y = \sin kx$ 的图像可以由 $y = \sin x$ 的图像开始, 在 x 轴方向拉伸一个因子 $\frac{1}{k}$ 而得到.

对于函数 $y = \cos kx$ ($k > 0$) 的图像, 有类似的结果成立.

基本函数簇是 $y = a \sin k(x - \beta)$. 这里常数 k 的重要性在哪里? 我们已经知道 $\frac{2\pi}{k}$ 是这个函数的周期. 所以在一个 2π 长的区间里, 这个函数重复了它的周期 k 次. 由于这个原因, 常数 k 被称为这个函数的频率.



练习

1. 求下述函数的周期与频率.

(1) $\sin 5x$;

(2) $y = \sin \frac{x}{4}$;

(3) $y = \cos \frac{4x}{5}$;

$$(4) y = \cos \frac{5x}{4}.$$

2. 作出以下函数的图像, 并指出每一个的周期. 如果你想的话, 用图形计算器检验你的结果.

$$(1) y = \sin 3x;$$

$$(2) y = \sin \frac{x}{3};$$

$$(3) y = \sin \frac{3x}{2};$$

$$(4) y = \sin \frac{2x}{3};$$

$$(5) y = \cos \frac{2x}{3};$$

$$(6) y = \cos \frac{3x}{2}.$$

3. 下面是某个函数 $y = f(x)$ 的图像.

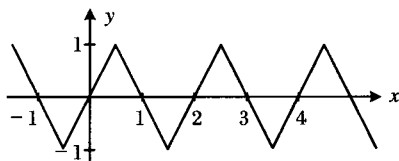


图 9.10

(1) 作出函数 $y = f(3x)$ 的图像;

(2) 作出函数 $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ 的图像.

9.4 正弦曲线的振幅

然后考查正弦曲线

$$y = a \sin k(x - \beta)$$

中 $a > 0, \beta = 0, k > 0$ 的情形.

例 9.3 作函数 $y = 3 \sin x$ 的图像.

解 这个函数的值是函数 $y = \sin x$ 相应值的 3 倍. 因此这个图像将与 $y = \sin x$ 具有同样的周期, 但每个 y 值都将被乘以 3, 图像如图 9.11 所示.

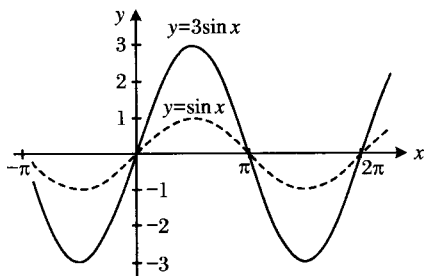


图 9.11

由图可知,函数 $y = 3\sin x$ 的图像是由函数 $y = \sin x$ 的图像在 y 轴方向拉伸而得到的. 类似地, 不难发现函数 $y = \frac{1}{2}\sin x$ 的图像是由函数 $y = \sin x$ 的图像在 y 轴方向

压缩而得到的. 因此有如下的一般性结果:

对于 $a > 1$, 函数 $y = a\sin x$ 的图像可以由 $y = \sin x$ 的图像在 y 轴方向拉伸而得到.

对于 $0 < a < 1$, 函数 $y = a\sin x$ 的图像可以由 $y = \sin x$ 的图像在 y 轴方向压缩而得到.

对于周期不是 2π 的函数以及形如 $y = a\cos x$ 的函数的图像, 类似的结果也成立. 常数 a 被称为函数 $y = a\sin k(x - \beta)$ 的振幅.



练习

1. 作出以下函数的图像, 并指出每一个函数的周期和振幅. 和以前一样, 在作完之后, 你可以使用图形计算器检验你的结果.

(1) $y = 2\sin x$;

(2) $y = \frac{1}{2}\sin x$;

(3) $y = 3\sin 2x$;

(4) $y = \frac{1}{2}\sin 3x$;

(5) $y = 4\cos x$;

(6) $y = \frac{1}{3}\cos 2x$.

2. 假设 $y = f(x)$ 是 9.3 节练习中的第 3 题所给出的

图形对应的函数.

(1) 作出函数 $y = 3f(x)$ 的图像;

(2) 作出函数 $y = \frac{1}{3}f(x)$ 的图像.

9.5 平移正弦曲线

本节我们考查正弦曲线

$$y = a \sin k(x - \beta)$$

中 $a = 1, k = 1, \beta$ 为任意值的情形.

我们从两个例子开始, 其中一个角 β 为正数, 而另一个角 β 是负数.

例 9.4 作出函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 的图像.

解 我们将通过把这个新函数的图像和我们熟悉的函数 $y = \sin x$ 的图像联系起来的方法来作图. 如图 9.12 和表 9.1 所示, 在原来图像上取三个特定位置的点^①将会有助于我们理解这种方法.

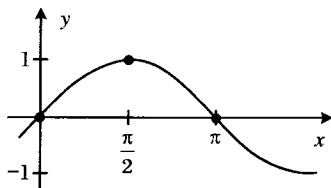


图 9.12

表 9.1

x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0

^① 当然, 有了计算器或者正弦表, 你可以得到更多的值. 或者, 你的记忆力很好, 可以记住其他一些特定角的正弦值. 但这三个点目前已经够用.

在函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 图像上的相应的点是什么？
 用 $x=0$ 是不方便的，因为此时 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ ，它的值不好处理。类似地，如果用 $x = \frac{\pi}{2}$ ，我们将需要 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$ 的值，同样也是不方便的。

但是如果令 $x = \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}, \pi + \frac{\pi}{5}$ ，事情就简单多了，如表 9.2 所示。

表 9.2

x	$x - \frac{\pi}{5}$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$
$\frac{\pi}{5}$	0	0
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\pi + \frac{\pi}{5}$	π	0

也就是说，我们对新函数所选取的“对应点”正好是那些其 y 值等于原始函数中的 y 值的三个点，而不是 x 值相同的点。 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 的图像看上去就像函数 $y = \sin x$ 的图像，但是向右平移了 $\frac{\pi}{5}$ 个单位，如图 9.13 所示。

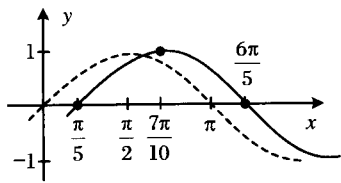


图 9.13

但是我们必须对整个图像核实这一点，而不仅仅只是看三个点。图 9.13 上的其他点是否也是用同样的方式平移的呢？让我们在 $y = \sin x$ 图像上取任意一个点 $(x_0, \sin x_0)$ 。如果将它向右平移 $\frac{\pi}{5}$ ，我们只是把 $\frac{\pi}{5}$ 这个数加到该

点的 x 坐标上,而不改变它的 y 坐标.所以得到的新点是 $(x_0 + \frac{\pi}{5}, \sin x_0)$,而它确实是落在函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{5})$ 的图像上.

除了是正数外,数字 $\frac{\pi}{5}$ 没什么特别的.

一般而言,下面这个断言是有用的:

若 $\beta > 0$, 函数 $y = \sin(x - \beta)$ 的图像可以由 $y = \sin x$ 的图像向右平移 β 个单位而得到.

那么, $\beta < 0$ 如何呢?

例 9.5 作函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{5})$ 的图像.

解 在这个例子里, $\beta = -\frac{\pi}{5}$. 我们再次把这个图像与函数 $y = \sin x$ 的图像联系起来. 用例 9.4 的方法, 寻找 x 的值使得

$$\sin(x + \frac{\pi}{5}) = 0,$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{5}) = 1,$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{5}) = 0. \quad (\text{第二次})$$

不难发现, 这些值分别是 $x = -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, \pi - \frac{\pi}{5}$. 利用这些值, 我们发现 $y = \sin(x + \frac{\pi}{5})$ 的图像可以从 $y = \sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位而得到(图 9.14):

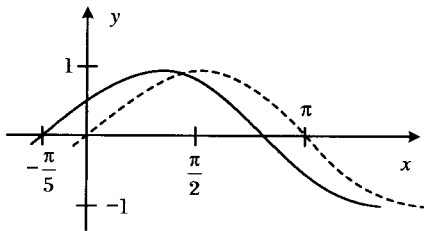


图 9.14

一般地, 函数 $y = \sin(x - \beta)$ 的图像可以由 $y = \sin x$ 的图像平移 β 个单位而得到. 若 β 是负的, 则向左平移; 若 β 是正的, 则向右平移.

数字 β 被称为这条曲线的位相角或者相移. 类似的结果对于 $y = \cos(x - \beta)$ 的图像也成立.



练习

1. 作以下函数的简图:

(1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

(3) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

(4) $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

(6) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

(7) $y = \sin(x - 2\pi)$.

2. 对于图 9.15 所示的每条曲线, 写出形如 $y = \sin(x - \alpha)$ 的方程:

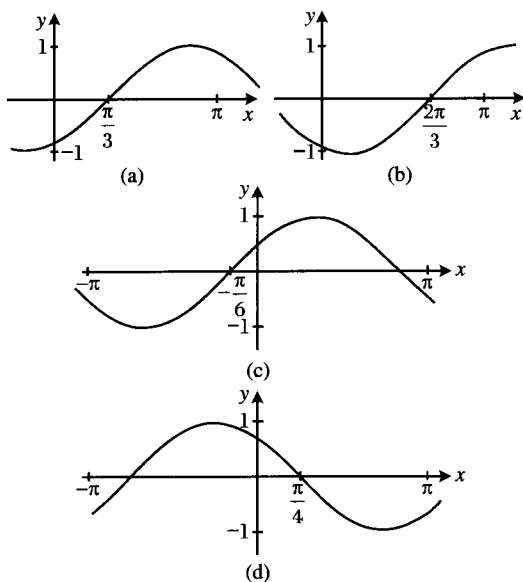


图 9.15

9.6 平移且拉伸

最后我们作正弦曲线 $y = a \sin k(x - \beta)$ 的图像, 当我们把曲线的平移和改变周期结合起来时, 会碰到一点小小的困难.

例 9.6 作函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像.

解 让我们把这个方程写成标准的形式:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

我们发现该图像是由 $y = \sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位而得到的.

初略一看, 你可能会以为是向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位. 但这是不对的. 在原始的方程里, $\frac{\pi}{3}$ 是加在 $2x$ 上, 而不是加在 x 上. 如果我们把方程写成标准的形式, 就可以避免这样的错误.



练习

1. 作以下函数的图像:

(1) $y = \sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$

(2) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right);$

(3) $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

2. 对于图 9.16 所示的两个图像, 写出形如 $y = \sin k(x - \beta)$ 的方程.

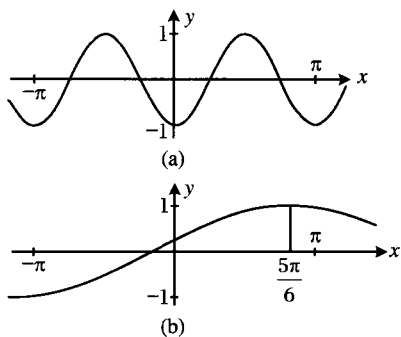


图 9.16

9.7 一些特殊的平移:半周期

在本节中,你将会看到,虽然我们限制了 a 和 k 为正数,并且忽略了余弦函数,但并没有失去一般性.

把一般方程写成 $y = a \sin k(x + \gamma)$ (其中 $\gamma = -\beta$) 是有用的. 此时,对于正的 γ 值,我们是在向左平移. 对于特殊的值 $c = 2\pi$,我们已经知道 $y = \sin x$ 的图像会发生什么事情了. 因为 2π 是这个函数的一个周期,所以在做这样一个平移后函数图像将会和它自身重合.

事实上,我们可以给出如下关于函数的一个周期的等价定义:

如果函数 $y = f(x)$ 的图像在向左平移 p 个单位后与它自身重合,那么我们就说该函数具有周期 p .

我们原来的定义是说如果一个函数满足 $f(x) = f(x + p)$, 其中 x 是任意使得这些表达式都有定义的值,那么 $f(x)$ 就是以 p 为一个周期的周期函数. 我们这个新定义与原来的定义是等价的,因为如果把函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 p 个单位,正好得到 $y = f(x + p)$ 的图像. 当且仅当 $f(x) = f(x + p)$ 时,两个图像重合.

让我们看看如果把 $y = \sin x$ 的图像向左平移 $\frac{m\pi}{2}$ 个单位,其中 m 是一个整数,会发生什么情况.

对于 $m = 1$, 把 $y = \sin x$ 的图像向左平移后, 得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图像(图 9.17):

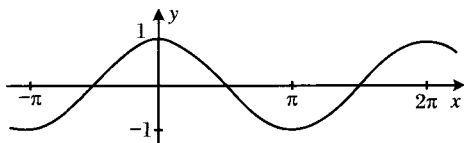


图 9.17

但是 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. 请读者们自行验证这一点: 可以用加法公式验证, 也可以从定义出发, 一个象限一个象限地验证. 总之, 我们有:

函数 $y = \cos x$ 的图像可以通过把 $y = \sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 而得到.

所以我们不需要再专门研究 $y = a \cos k(x + \beta)$ 所代表的曲线. 只需令 $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2k}$, 我们就可以把任意这样形式的曲线改写为 $y = a \sin k(x + \gamma)$.

对于 $m = 2$, 我们可以作 $y = \sin(x + \pi)$ 的图像, 如图 9.18 所示.

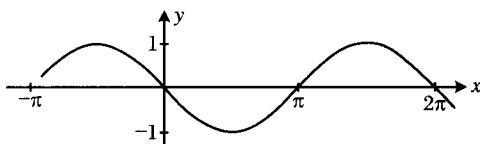


图 9.18

但因为 $\sin(x + \pi) = -\sin x$, 所以我们有:

函数 $y = -\sin x$ 的图像可以通过把 $y = \sin x$ 的图像向左平移 π 而得到.

事实上, 我们不需要对负的 a 值, 专门研究 $y = a \cdot \sin k(x + \gamma)$ 所代表的曲线. 我们只要调整一下 γ 的值, 就可以把任意这样的曲线用另一个具有同样形式但 $a > 0$ 的方程来描述.

下面这个一般的定义是比较便利的.

我们称数 p 是函数 f 的一个半周期, 如果对于任意使得 $f(x)$ 以及 $f(x + p)$ 都有定义的 x 值, 都有 $f(x + p) =$

$-f(x)$.

我们已经看到了 π 是函数 $y = \sin x$ 的一个半周期.

现在令 $m = 3$. 我们将得到图 9.19:

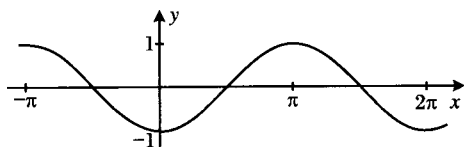


图 9.19

不难验证

$$\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

若 $m = 4$, 就平移了 $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, 而我们已经知道这是一个整周期, 所以就又回到了原来正弦曲线的图像.

那么 $m = 5$ 会怎么样呢? 因为 $5 = 1 + 4$, 所以有 $\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 这里用到了 2π 是正弦函数的一个周期. 所以 $m = 5$ 的结果和 $m = 1$ 是一模一样的, 而这样的循环也会一直继续下去.

一般地, 我们可以做出如下断言:

若 $m = 4n$, 其中 n 是某个整数, 则 $\sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) = \sin x$.

若 $m = 4n + 1$, 其中 n 是某个整数, 则 $\sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) = \cos x$.

若 $m = 4n + 2$, 其中 n 是某个整数, 则 $\sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) = -\sin x$.

若 $m = 4n + 3$, 其中 n 是某个整数, 则 $\sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) = -\cos x$.

到这里, 我们就完成了对整簇正弦曲线 $y = a \sin k(x - \beta)$ 的分析.

常数 a 被称为曲线的振幅. 它告诉我们函数的值离 0 可以有多远. 不失一般性, 我们总可以取 a 为正数.

常数 k 被称为曲线的频率. 它告诉我们在 2π 长的区

间里共重复了多少个周期. 曲线的周期是 $\frac{2\pi}{k}$. 不失一般性, 我们总可以取 k 为正数.

常数 β 被称为曲线的位相或者相移. 它告诉我们曲线被向左或者向右平移了多远. 如果允许 β 是任意数, 那么我们就不用考虑负的 a 或者 k , 而且也不用再专门研究余弦函数所表示的曲线.



练习

1. 本题是选择题. 各选项所代表的含义如下:

- (A) 该表达式等于 $\sin x$;
- (B) 该表达式等于 $\cos x$;
- (C) 该表达式等于 $-\sin x$;
- (D) 该表达式等于 $-\cos x$.

则选出下列各式所对应的选项.

- (1) $\sin(x + 2\pi)$;
- (2) $\sin(x + 3\pi)$;
- (3) $\sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right)$;
- (4) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;
- (5) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;
- (6) $\sin\left(x + \frac{19\pi}{2}\right)$;
- (7) $-\sin\left(x - \frac{19\pi}{2}\right)$;
- (8) $\sin\left(x + \frac{157\pi}{2}\right)$;
- (9) $\sin\left(x - \frac{157\pi}{2}\right)$.

2. 证明 π 是函数 $y = \cos x$ 的一个半周期. π 是否为函数 $y = \tan x$ 的一个半周期? 函数 $y = \cot x$ 呢?

3. 证明若 q 是某个函数 f 的一个半周期, 那么 $2q$ 就是 f 的一个周期.

4. 证明对于任意的 x 值, $\cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$ 等于下列值:

- (1) $-\sin x$, 当 $m = 4n + 1$ 时, 其中 n 是任意整数;

(2) $-\cos x$, 当 $m = 4n + 2$ 时, 其中 n 是任意整数;

(3) $\sin x$, 当 $m = 4n + 3$ 时, 其中 n 是任意整数;

(4) $\cos x$, 当 $m = 4n$ 时, 其中 n 是任意整数.

5. 把下面每个函数写成 $y = a \sin k(x - \beta)$ 的形式, 其中 a 和 k 都是非负的.

(1) $y = -2 \sin x$;

(2) $y = -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$;

(3) $y = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$;

(4) $y = 3 \cos x$;

(5) $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$;

(6) $y = -3 \cos \left(x + \frac{\pi}{8} \right)$.

6. 作函数 $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{5} \right)$ 的图像.

7. 假设从函数 $y = \cos x$ 的图像开始. 需要把这个图向右平移多远的距离, 就可以得到函数 $y = \sin x$ 的图像? 需要把这个图向左平移多远的距离, 就可以得到函数 $y = \sin x$ 的图像?

8. 证明: 如果 m 是奇数, 则 $\tan \left(x + \frac{m\pi}{2} \right) = -\cot x$.

如果 m 是偶数, 表达式 $\tan \left(x + \frac{m\pi}{2} \right)$ 可以简化成什么?

9.8 画正切函数与余切函数

函数 $y = \tan x$ 与函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在两个很重要的方面有所不同. 首先, 正弦函数与余弦函数的定义域是全体实数, 而 $\tan x$ 对于 $x = \frac{n\pi}{2}$ (其中 n 是任意奇数) 是没有定义的.

其次, 正弦函数与余弦函数是有界的: 它们所取的值

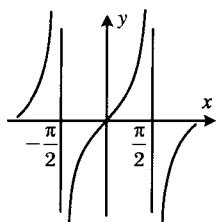


图 9.20

总是介于 -1 和 1 (含端点) 之间. 但函数 $y = \tan x$ 的值可以取到所有的实数.

这些差别从函数 $y = \tan x$ 的图像上很容易得到 (图 9.20).

注意, 函数的图像逼近直线 $x = \frac{\pi}{2}$, 但永远达不到它. 这条线叫作 $y = \tan x$ 的垂直渐近线. 对于每个奇整数 n , 直线 $x = \frac{n\pi}{2}$ 都是函数 $y = \tan x$ 图像的一条垂直渐近线.

为了作出 $y = \cot x$ 的图像, 我们注意到

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

因此, 函数 $y = \cot x$ 的值也可以取到所有的实数. 它对于任意 $x = n\pi$ (其中 n 是任意整数) 是没有定义的, 且在 $x = n\pi$ 处有一条垂直渐近线 (图 9.21).

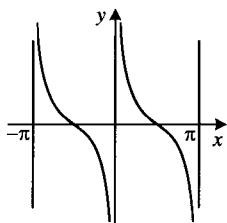


图 9.21



练习

1. 作以下函数的图像:

(1) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $y = 3\tan x$;

(3) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. 假设我们已经画好了方程 $y = \tan x$ 的图像. 能否找到一个角 φ , 使得可以用形如 $y = \cot(x + \varphi)$ 的方程来描述这个图像? 为什么可以或者为什么不行?

9.9 关于正弦函数之和的一个重要问题

希望通过前面的学习, 你已经看到了我们一直在学的正弦曲线簇的重要性和美妙之处. 物理学家们把这一

簇曲线叫作谐振曲线.

现在让我们考虑下述问题. 假设有两条正弦曲线(谐振):

$$y_1 = a_1 \sin k_1(x - \beta_1),$$

$$y_2 = a_2 \sin k_2(x - \beta_2).$$

它们的和是否还是正弦曲线(谐振)呢? 也就是说,

$$y = a_1 \sin k_1(x - \beta_1) + a_2 \sin k_2(x - \beta_2)$$

是否还是一条正弦曲线? 答案有点令人惊奇. 如果 $k_1 = k_2$, 答案是“是”, 但如果 $k_1 \neq k_2$, 答案就是“否”.

也就是说, 两个调和振动的和还是一个调和振动, 当且仅当两个振动的频率是一样的. 后面几节将探索这个结论.



练习

下面两个题目都与下列三个函数有关:

$$y_1 = 2\sin x,$$

$$y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y_3 = 3\sin 2x.$$

1. 用计算器作下述函数的图像:

(1) $y_1 + y_2$;

(2) $y_1 + y_3$;

(3) $y_2 + y_3$.

2. 第 1 题的图像中有哪些是正弦曲线?

9.10 正弦函数与余弦函数的线性组合

定义 如果有两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及两个常数 a 和 b , 那么我们就称表达式 $af(x) + bg(x)$ 是函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的线性组合.

让我们看看正弦函数的线性组合图像.

例 9.7 作函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$ 的图像.

解 因为 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ 且 $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, 所以我们可以用公式 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$. 令 $\alpha = x$ 且 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 则这个公式告诉我们给定的函数可以被写成 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. 现在就可以像在 9.5 节所做的那样, 作出它的图像(图 9.22).

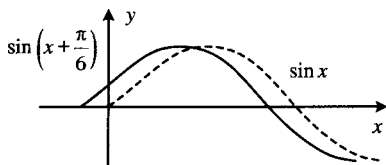


图 9.22

这个解法看起来很不自然, 但它其实是一种很一般的方法. 此方法之所以有效, 是因为存在一个角 φ 使得 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ 且 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而这个情况会发生又是因为数值 $A = \frac{1}{2}$ 以及 $B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 满足方程 $A^2 + B^2 = 1$. (请自行验证这个计算.)

但如果 $A^2 + B^2$ 不等于 1, 会怎么样呢?

例 9.8 作函数 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ 的图像.

解 我们的“好朋友”(见第 2 章)隐藏在这个表达式的后面: 只要有 3 和 4, 我们就可以努力找出数字 5. 事实上, $\frac{f(x)}{5} = \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x$, 而 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, 所以我们可以用例 9.7 的方法. 因为存在一个角 φ 使得 $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ 且 $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, 所以

$$\frac{f(x)}{5} = \cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \sin(x + \varphi),$$

即对于某个特定的角 φ , 有 $f(x) = 5\sin(x + \varphi)$. 因此 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ 的图像是一个正弦函数的曲线向左平移了 φ 个单位, 且振幅是 5(图 9.23).

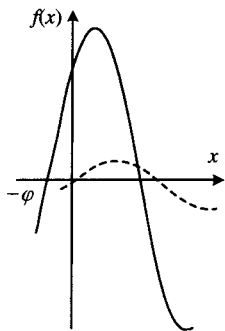


图 9.23

同样的技巧适用于 $y = \sin kx$ 和 $y = \cos kx$ 的线性组合,只要这两个函数的频率是一样的. 这个条件非常重要,所以我们把它陈述为一个定理:

定理 对于 $y = \sin kx$ 和 $y = \cos kx$ 的任一线性组合,都存在合适的 a 和 φ ,使得该线性组合可以表示成 $y = a \sin k(x + \varphi)$.

证明 $y = \sin kx$ 和 $y = \cos kx$ 的线性组合可以写成 $y = A \sin kx + B \cos kx$. 我们可以把它改写成

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin kx + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos kx \right).$$

此时有

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1,$$

故存在角 α ,使得

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{和} \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (9.1)$$

于是,我们就有

$$\begin{aligned} A \sin kx + B \cos kx &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \alpha \sin kx + \sin \alpha \cos kx) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(kx + \alpha) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin k \left(x + \frac{\alpha}{k} \right). \end{aligned}$$

取 $a = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = \frac{\alpha}{k}$,我们就得到所需要的形式.

以上证明了 $A \sin kx + B \cos kx$ 可以写成 $a \sin k(x + \varphi)$ 的形式,其中 $a = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = \frac{\alpha}{k}$ [α 是由上面的方程 (9.1) 给出的].

上述定理的逆命题也是正确的:

定理 函数 $a \sin k(x + \varphi)$ 可以写成函数 $\sin kx$ 和 $\cos kx$ 的线性组合.

证明 我们有 $a \sin k(x + \varphi) = a(\sin kx \cos k\varphi + \cos kx \sin k\varphi)$. 取 $A = a \cos k\varphi$, $B = a \sin k\varphi$, 就可以得到 $a \sin k(x + \varphi) = A \sin kx + B \cos kx$.

现在我们可以将正弦曲线写成这两种标准形式的任何一种: $y = a \sin k(x - \beta)$ 或者 $y = A \sin kx + B \cos kx$.

例 9.9 将函数 $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ 写成函数 $y = \sin x$

和 $y = \cos x$ 的线性组合.

解

$$\begin{aligned} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sin x + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \\ &= \sin x + \sqrt{3} \cos x. \end{aligned}$$



练习

1. 将函数 $y = 2\sin x + 3\cos x$ 写成 $y = a \sin k(x - \beta)$ 的形式. 振幅是多少?

2. 函数 $y = 2\sin x + 3\cos x$ 能取到的最大值是多少?

3. 将下面的每个函数写成 $y = a \sin k(x - \beta)$ 的形式. 每个函数的最大值是多少?

(1) $y = \sin x + \cos x$;

(2) $y = \sin x - \cos x$;

(3) $y = 4\sin x + 3\cos x$;

(4) $y = \sin 2x + 3\cos 2x$.

4. 将下面的每个函数写成 $A \sin x + B \cos x$ 的形式:

(1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

9.11 具有相同频率的正弦曲线的线性组合

现在我们可以设法解决 9.9 节中的重要问题了.

定理 两个具有相同频率的正弦曲线之和仍是具有该相同频率的正弦曲线.

证明 取两条正弦曲线

$$a_1 \sin k(x - \beta_1) \quad \text{和} \quad a_2 \sin k(x - \beta_2).$$

利用加法公式, 可以找到合适的常数 A_1, A_2, B_1 和 B_2 ,

使得

$$a_1 \sin k(x - \beta_1) = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx,$$

$$a_2 \sin k(x - \beta_2) = A_2 \sin kx + B_2 \cos kx.$$

于是,正弦曲线之和就等于

$$(A_1 + A_2) \sin kx + (B_1 + B_2) \cos kx.$$

但从 9.9 节的定理知,上式也是一条正弦曲线.证毕.

建议读者自行给出上面证明中的常数 A_1, A_2, B_1 和 B_2 的表达式,从而把证明细节补全.

注意我们所处理的两个函数可以具有不同的振幅,结果只依赖于它们具有相同的周期这一事实.这个结果在从事电力工作时非常重要.交流电是用正弦曲线描述的,而这个定理告诉我们,如果把两个具有相同周期的电流加起来,所得到的电流还会具有相同的周期.所以如果从不同的源头获取电力,我们不必担心怎样将它们混合起来(无论它们的相移是否对准),只要它们的周期相同就可以.

下面这个结果在一些更高等的数学中非常重要.

定理 若函数 $y = \sin kx$ 和 $y = \cos kx$ 的一个线性组合被平移了 β 角,那么所得到的结果同样可以表达成这两个函数的线性组合.

证明 取线性组合

$$a \sin kx + b \cos kx,$$

然后把它平移 β 角,得到的就是

$$a \sin k(x - \beta) + b \cos k(x - \beta).$$

我们知道 $\cos k(x - \beta)$ 可以被写成 $\sin k(x - \gamma)$ 的形式,其中 γ 是某个角.因此可以把平移后的线性组合写成

$$a \sin k(x - \beta) + b \sin k(x - \gamma)$$

但这是具有相同频率 k 的正弦曲线之和,故前面的定理告诉我们它可以被写成一个具有频率 k 的正弦曲线(即便它们的相移是不同的!).而从 9.9 节知道,这样的和可以写成 $\sin kx$ 和 $\cos kx$ 的一个线性组合.

例 9.10 假设取函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的一个线性组合

$$y = 2 \sin x + 4 \cos x$$

的图像,然后把它向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,我们将会得到

$$\begin{aligned}
 y &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) \\
 &\quad + 4\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x \\
 &\quad + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - 4 \cdot \frac{1}{2} \sin x \\
 &= (\sqrt{3} - 2) \sin x + (2\sqrt{3} + 1) \cos x,
 \end{aligned}$$

而这还是 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的一个线性组合.

只要我们对 $y = \sin kx$ 和 $y = \cos kx$ 的线性组合进行平移, 这个技巧都是有效的. 证明与上述例子中的推理一样.

最后, 我们还没有考虑具有不同频率的正弦函数以及余弦函数的线性组合. 这是一种复杂很多的情形, 而且会通向一些非常高级的数学方向, 比如傅里叶 (Fourier) 级数与殆周期函数. 我们将稍微晚点再回到这个问题.



练习

1. 将下面每个函数表示成 $y = A \sin kx + B \cos kx$ 的形式.

$$(1) y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(2) y = 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. 函数 y_1, y_2, y_3 与 9.9 节练习题中的相同:

(1) 将 $y_1 + y_2$ 写成 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的线性组合;

(2) 当你试图把 $y_1 + y_3$ 写成 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的线性组合时, 哪里将出问题?

9.12 不同频率函数的线性组合

迄今为止, 我们得到了一些有关相同频率的正弦函

数以及余弦函数之线性组合的重要结果. 我们想要研究一下当 $k_1 \neq k_2$ 时, 像 $y = \sin k_1 x$ 与 $y = \sin k_2 x$ 这样两个函数的和. 我们先从一些看起来并不完全相关的例子开始.

例 9.11 作函数 $y = x + \sin x$ 的图像.

解 这个图像上的每个 y 值都是另外两个 y 值的和: 值 $y = \sin x$ 与值 $y = x$. 所以可以取曲线 $y = \sin x$ 上的每个点, 通过把 $y = x$ 的值加到值 $y = \sin x$ 上的办法把它“向上提”.

这个过程在满足 $\sin x = 0$ 的那些点处是很容易获得的. 因为在这些点处, $x + \sin x$ 的值就是 x (图 9.24).

在图 9.24 所示的点中间, 线 $y = x$ 被稍微向上提了一点, 或者被稍微向下降了一点, 幅度及方向取决于 $\sin x$ 的(正或者负)值. 我们可以认为这是正弦函数的曲线“漂浮”在直线 $y = x$ 上.

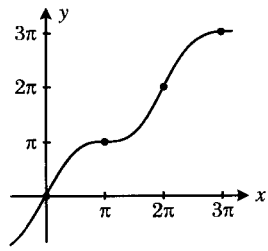


图 9.24

例 9.12 作函数 $y = \sin x + \frac{1}{10} \sin 20x$ 的图像.

解 这个看起来要复杂很多, 但实际上可以用与例 9.11 完全相同的方法. 我们分别作出函数 $y = \sin x$ 与 $y = \frac{1}{10} \sin 20x$ 的图像, 然后在每一点处将它们的 y 值加起来, 如图 9.25 所示.

同样, 我们可以认为是一条曲线“漂浮”在另一条曲线上. 这一次, 是曲线 $y = \frac{1}{10} \sin 20x$ “浮在”曲线 $y = \sin x$ 上, 或者说是在每点处都扰动了一点点.

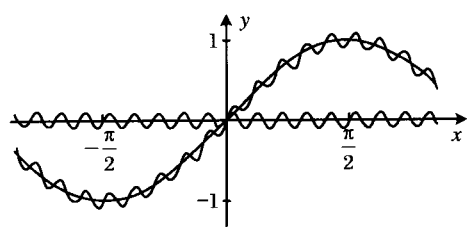


图 9.25

注意, 新曲线不再是一条正弦曲线. 我们不能把它表示成 $y = a \sin k(x - \beta)$, 或者 $y = A \sin kx + B \cos kx$ 的形式.



练习

作下述函数的图像.

$$(1) y = -x + \sin x;$$

$$(2) y = x^2 + \sin x;$$

(3) $y = x^2 + \cos x$; (提示: 这个函数是奇函数吗? 是偶函数吗?)

$$(4) y = x^3 + \sin x;$$

$$(5) y = x^2 + \frac{1}{10} \sin x;$$

$$(6) y = \cos x + \frac{1}{10} \sin 20x;$$

$$(7) y = 2\sin x + \frac{1}{10} \sin 20x.$$

9.13 求不同周期的正弦曲线之和的周期

我们知道函数 $y = \sin 10x + \sin 15x$ 不再是一条正弦曲线, 但它依然是周期的. 事实上, 如果把这条曲线平移 2π , 我们得到

$$\begin{aligned} y &= \sin 10(x + 2\pi) + \sin 15(x + 2\pi) \\ &= \sin(10x + 20\pi) + \sin(15x + 30\pi) \\ &= \sin 10x + \sin 15x. \end{aligned}$$

它的最小正周期是多少呢? 我们可以通过分别看看每个被加函数的周期的方法来回答这个问题. 函数 $y = \sin 10x$ 的每个周期必然是 $m \cdot \frac{2\pi}{10}$ 的形式, 其中 m 是一个整数. 函数 $y = \sin 15x$ 的每个周期必然是 $n \cdot \frac{2\pi}{15}$ 的形式, 其中 n 也是一个整数. 要想同时是这两个函数的周期, 这个数必须同时具有这两种形式. 也就是说, 必然有整数 m 和 n , 使得 $m \cdot \frac{2\pi}{10} = n \cdot \frac{2\pi}{15}$, 即 $3m = 2n$. 如果取

$m=2, n=3$, 我们的问题就解决了. 于是, 数 $\frac{2\pi}{5} = 2 \cdot \frac{2\pi}{10} =$

$3 \cdot \frac{2\pi}{15}$ 同时是这两个函数的周期. 因为我们取的 m 和 n

是满足条件的最小正数, 这就是函数 $y = \sin 10x + \sin 15x$ 的最小正周期.

上面的论证取自数论, 与两个数的最小公倍数有关. 这个概念在基础算术中十分有用, 能够用来找两个分数的最小公分母. 下面是数论中可以证明的一般性结论:

当且仅当 k_1/k_2 是一个有理数时, 函数 $y = \sin k_1 x + \sin k_2 x$ 是周期的.

但是像 $y = \sin x + \sin \sqrt{2}x$ 这样的函数就没有周期了.



练习

求下述函数的(最小正)周期.

(1) $y = \sin 2x + \sin 3x$;

(2) $y = \sin 3x + \sin 6x$;

(3) $y = \sin 4x + \sin 6x$;

(4) $y = \sin \sqrt{2}x + \sin 3\sqrt{2}x$.

9.14 傅里叶先生的一个发现

例 9.13 作函数 $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 的图像.

解 本例和例 9.12 类似. $\sin x$ 的值被“扰动”了 $\frac{1}{3}\sin 3x$, 如图 9.26 所示.

例 9.14 作函数 $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$ 的图像.(因为这个函数过于复杂, 请使用图形计算器或者软件程序.)

解 $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$ 的图像如图 9.27

所示.

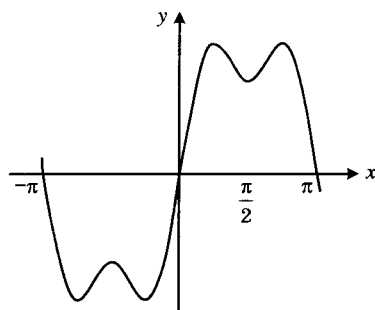


图 9.26

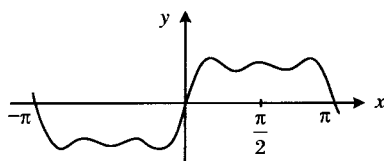


图 9.27

比较下面三个函数的图像(图 9.28):

$$y = \sin x,$$

$$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x.$$

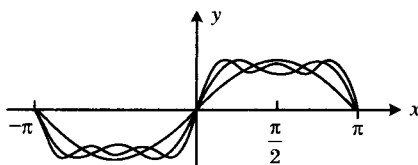


图 9.28

上述三个函数的公式展现了一定的规律. 你能够猜出这个规律的下一个公式是什么吗? 它的图像又是什么样子呢? 用图形计算器或者软件程序验证一下你的猜测.

不难猜出这些函数的图像看起来将越来越像下面这个样子(图 9.29):

数学家们会说这列函数收敛到一个极限, 而且这个极限函数的图像正好是由图 9.29 给出的. 事实上, 这是

傅里叶级数这个非常重要的数学理论的一个特殊情况. 法国物理学家傅里叶发现了几乎每个周期函数(包括一些具有非常复杂甚至离奇图像的函数)都可以表示成一些正弦函数与余弦函数之和的极限(上面的例子碰巧没有余弦函数). 他还说明了怎样计算这个和(用到微积分的技巧).

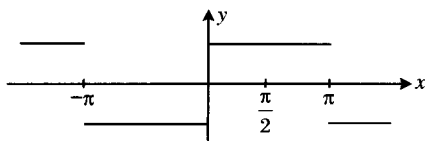


图 9.29

傅里叶的发现让数学家们能够非常简单地描述任意周期函数, 而物理学家们则可以将这些描述用于为周而复始的运动建立模型. 比如, 声音是由空气粒子的周期振动所产生的, 心跳是体内某种肌肉的周期运动. 这些现象(以及很多别的现象)都可以使用傅里叶分析去探索.



练习

请使用图形计算器或者画图软件来完成下面的题目.

1. 作函数 $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 的图像.

2. 作函数 $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x$ 的图像.

3. 考虑下面这列函数:

$$y = \sin x,$$

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x,$$

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x.$$

你觉得这列函数的极限函数是什么样子的？作出其图像。

4. 考虑下面这列函数：

$$y = \cos x,$$

$$y = \cos x + \frac{1}{9}\cos 3x,$$

$$y = \cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x,$$

$$y = \cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \frac{1}{49}\cos 7x.$$

你觉得这列函数的极限函数是什么样子的？作出其图像。你有没有发现这些振幅中的规律？

附录

附录 1 周期现象

自然界中的很多现象都呈现出周期性：物体的运动每隔固定的一段时间后重复一遍。事实上，正弦函数就是从数学上描述这些现象的关键。

下面的练习与某些周期运动有关。它们在数学上的表现形式会让我们想起正弦函数的曲线，但并不完全一样。在更加深刻的工作中，三角函数是可以被用来描述这些运动的。

练习

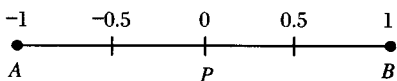


附图 9.1

1. 附图 9.1 代表一条长度为 1 英尺的线段。

一只蚂蚁正沿着这条线段爬，从点 A 爬到点 B，然后回头，其速度是每分钟 1 英尺。作图以表明该蚂蚁在任意给定时刻 t 到点 A 的距离。比如，当 $t = 0.5$ 时，蚂蚁正在 A 和 B 的中点，且头朝向 B。

2. 附图 9.2 代表数轴的一部分，从点 $A = -1$ 到点 $P = 0$ 再到点 $B = +1$ 。

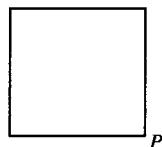


附图 9.2

一只蚂蚁从点 P 开始沿着这条数轴爬. 这只蚂蚁先爬到点 B , 再爬到点 A , 然后再回到点 B , 以此类推. 该蚂蚁爬行的速度是每分钟 1 英尺. 作图以表明在任意给定时刻 t , 该蚂蚁在数轴上的位置. 比如, 当 $t = 0.5$ 时, 该蚂蚁在 0.5 处, 而当 $t = 2.5$ 时, 该蚂蚁在 -0.5 处.

3. 附图 9.3 代表某房间的一面正方形的墙壁. 这个正方形的每条边都是 8 英尺长.

一只蚂蚁正沿着这面墙的边界爬, 其速度是每分钟一英尺. 它是从图中所示的点 P 开始, 沿着逆时针方向移动的. 作图以表明在任意给定时刻 t , 该蚂蚁在地板之上的高度(称之为 h). 比如, 当 $t = 4$ 时, 该蚂蚁的高度是 4 英尺, 而当 $t = 12$ 时, 该蚂蚁的高度是 8 英尺.



附图 9.3

4. 芬迪湾位于加拿大的新布伦瑞克省和新斯科舍省之间. 生活在该海岸边的人们经历着世界上最高的潮汐, 其高度可以达到 40 英尺. 由此所产生的是每日两次交替变化的风景. 随着潮汐的升降, 海滩变成海湾, 潺潺的小溪变成湍急的大河, 半岛变成岛屿, 等等.

对于生活在海洋附近的人而言, 知道何时涨潮与何时落潮是非常重要的. 但是在芬迪湾, 知道潮汐涨落到底有多快也是非常关键的. 这片区域的居民使用所谓的十二分律来估算这一点. 他们把潮涨和潮落之间的时间段取为六个小时(实际上要稍微多一点点). 然后他们粗略地估算出:

潮汐的 $\frac{1}{12}$ 将会在第一个小时内来到,

潮汐的 $\frac{2}{12}$ 将会在第二个小时内来到,

潮汐的 $\frac{3}{12}$ 将会在第三个小时内来到,

潮汐的 $\frac{3}{12}$ 将会在第四个小时内来到,

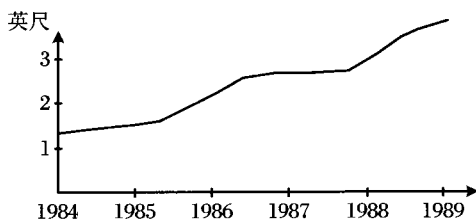
潮汐的 $\frac{2}{12}$ 将会在第五个小时内来到,

潮汐的 $\frac{1}{12}$ 将会在第六个小时内来到.

假定一天的潮汐总量是 36 英尺高. 用上述估计, 作出芬迪湾给定一个点处的水位高度图. 什么时候潮汐速度最快? 什么时候最慢呢?

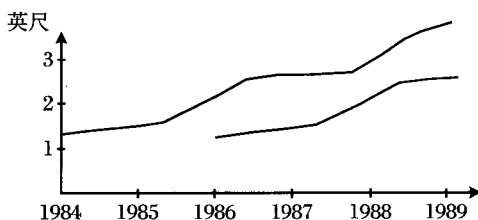
附录 2 怎样向弟弟妹妹们解释图的平移

小时候, 我们每隔几个月就要去看一次医生. 医生会量一量我们的身高, 然后作一个图以显示我们每次去的时候有多高. 附图 9.4 是“我”的身高图^①.



附图 9.4

两年后, 当“你”出生时, “我们的父母”问医生能否逐年预测你的身高. 呃, 她当然无法精确做到这一点, 但是医生说道: “要是新宝宝跟你们的大孩子有同样的生长曲线, 那么他在每一年的高度将会和你们的大孩子在两年之前的高度一样.” 也就是说, 医生所预测的成长曲线如附图 9.5 所示.



附图 9.5

① 当然, 在“我”很小的时候, 还不会站立, 所以他们量出来的是我的“长度”. 在我学会站立之后, 才变成我的高度.

在我 3 英尺高的两年后,你将会是 3 英尺高.在我 4 英尺高的两年后,你也将会是 4 英尺高,如此等等.你的生长曲线跟我的一模一样,只是向右平移了两年.如果预测你在某年的身高,只要看看在那年之前的前两年我的身高就可以了.所以如果我的身高图是由方程“身高 = $f(\text{年份})$ ”所确定,那么你的身高图就是由方程“身高 = $f(\text{年份} - 2)$ ”所给出.

当然,事实并不完全是这样的.我的生长曲线并没有与你的生长曲线完全一样.所以医生的预测是不准确的.但对于某些家庭而言,这种预测可能是准确的.

按照完全一样的方法,如果要处理 $y = \sin(x - \alpha)$ 的图像而不是 $y = \sin x$ 的图像,那你必须要“等”到 x 变大为 α ,新图的高度才会与旧图的高度一致.所以新图是向右平移了 α 个单位.

附录 3 具有有理周期的正弦曲线

把函数 $y = \sin x$ 作为我们的基础正弦曲线.该函数的周期是 2π ,这是一个无理数.我们所讨论过的其他函数也都具有无理周期.有没有正弦曲线具有有理周期呢?

考虑函数 $y = \sin 2\pi x$. 根据我们的公式,这个函数的周期是 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$. 我们能够直接验证这一点:

$$\sin[2\pi(x + 1)] = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin 2\pi x.$$

下面这些习题旨在构造具有其他有理周期的正弦曲线.



练习

1. 证明函数 $y = \sin \pi x$ 当 $x = 1, x = 2, x = 3$ 和 $x = 4$ 时取值都是 0.

2. 证明函数 $y = \sin 4\pi x$ 的一个周期是 $\frac{1}{2}$.

3. 写出一个具有周期 3 的正弦曲线方程.

4. 写出一个具有周期 2 的正弦曲线方程.

5. 对于任意正整数 n , 写出一个具有周期 n 的形如 $y = \sin kx$ 的函数.

附录4 从图形到方程

这是一个关于俄国沙皇阿列克谢·米哈伊洛维奇(Alexei Mikhaelovitch, 1629—1676, 罗曼诺夫王朝的第二位沙皇, 执政期为 1645—1676) 的故事. 某年 12 月份的一天, 他的宫廷天文学家跑来告诉他: “陛下, 从今天开始, 每天白天的时间会越来越长.”

沙皇龙颜大悦: “你干得很棒, 我的宫廷天文学家! 为表彰你的工作, 请接受这份礼物吧.” 然后, 他示意一名廷臣, 赐给了这位天文学家一块珍贵的宝石.

这位天文学家非常喜欢他的礼物. 他继续努力工作, 力求精益求精, 直到某年 6 月份的一天, 他再次向沙皇报告: “陛下, 从今天开始, 每天白天的时间会越来越短.”

这位沙皇一脸怒色: “什么? 在我的王国里, 黑夜会变长?” 于是, 他让人痛打了这位倒霉的天文学家.

当然, 白天时间长度的变化并不是这位天文学家的错, 也与任何别的天文学家无关. 其原因在于地轴与地球绕日轨道所在平面成一定的倾斜角. 因为这个现象, 从 12 月份到 6 月份, 白天会越来越长, 然后从 6 月份到 12 月份, 白天则会越来越短.

对我们而言, 有意思的是白天小时数的变化率. 其实, 如果用每天的白天小时数作图, 我们将得到一条正弦曲线(附图 9.6).

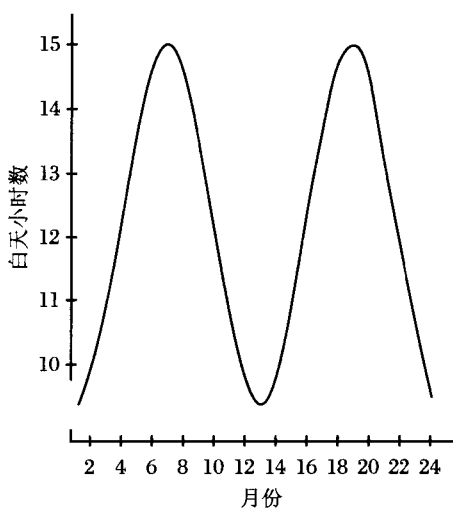
因为这条曲线高出 x 轴很多, 所以我们作图的时候让 y 轴“断开”, 这样才能看到图中有意义的部分. 如果你不喜欢这么做, 可以试试重新作一个 y 轴不“断开”的图. 你会发现图中绝大部分都是空白.

在下面的习题中我们会学到更多有关这条曲线的东西.



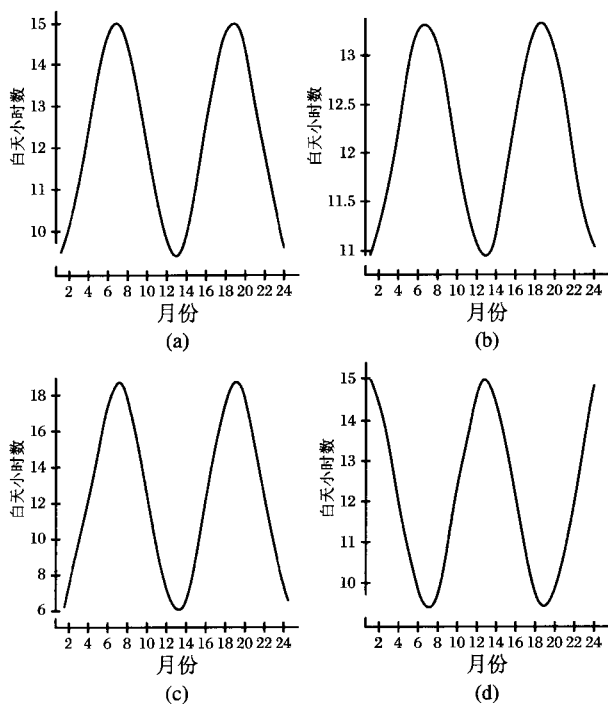
练习

1. 通过估测附图 9.6 中的距离, 求形如 $y = a \sin k(x - \beta) + c$ 的方程来逼近附图 9.6 所示的函数.



附图 9.6

2. 附图 9.7 显示了在某些特定的纬度处, 白天的小时数.



附图 9.7

注意到在图(a), (b)和(c)中, 白天的最大小时数都

发生在每年相同的时间,但图(d)中却发生于不同的时间.如果图(a)代表北半球的某个地方,那么其他各图的地点分别在哪个半球呢?

3. 注意到在每幅图中,白天小时数的“平均”值都是一样的.每条曲线都是沿着一条中间的水平直线上下振荡,而这个“平均”由该直线的 y 坐标给出.在每个地点,都有一年中的一些特定的日子,其白天的小时数与平均值完全一样.问:从一个地点变到另一个地点时,一年中达到该平均值的具体时间是怎么变化的?

第 10 章

反函数与三角方程

10.1 函数与反函数

让我们回忆一下函数的定义. 如果我们有二个集合 A 和 B , 那么从集合 A 到集合 B 的一个函数就是 A 的元素与 B 的元素间的一个对应, 使得

A 的每个元素都对应到 B 中的某个元素, 且

A 中没有元素会对应到 B 中的多个元素.

若集合 A 中的元素 x 对应于集合 B 中的元素 y , 我们就写作 $y = f(x)$, 其中 f 是代表函数自身的符号.

例 10.1 取 A 为全体实数的集合, B 是另一个全体实数的集合. 如果 x 是 A 中的一个元素, 我们就让它对应到 B 中的元素 $y = x^2$. 此时 A 中的每个元素都对应到 B 中的某个元素 y (因为任何实数都可以求平方), 而且 A 中没有有一个元素 x 对应到 B 中的多个元素 (因为当我们求一个数的平方时, 我们只会得到唯一一个结果).

我们关于函数的定义并不是很民主. 对于 A 中的每个元素, 我们必须恰好造出 B 中的一个元素. 但如果有一个 B 中的元素, 我们并不知道是否有 A 中的元素与它对应. B 中的元素有可能不对应于 A 中的任何元素, 有可能对应于 A 中的一个元素, 也有可能对应于 A 中的多个元素.^①

① 在一些旧的教材里, 这种不民主的局面是通过称 x 为自变量, y 为因变量来加以描述的.

例 10.2 在例 10.1 中,如果给定了 A 中的一个数 x ,我们就完全可以回答下面这个问题: B 中的哪个数 y 是对应 A 中的这个数? 比如,若 $x=3$,那么我们的答案就是 $y=9$,而若 $x=-3$,那么我们还是可以回答 $y=9$. 根据我们的定义,这是可以的. 唯一的限制是我们的答案必须是 B 中的一个数.

但若选择了集合 B 中的一个元素 y ,我们未必能回答下面这个问题: A 中的哪个元素对应于它? 例如,如果选的是 $y=9$,我们可以回答 $x=3$,也可以回答 $x=-3$,所以我们的答案将不是唯一的. 更糟糕的是,如果取 $y=-1$,那么我们根本就没有答案. 没有一个实数的平方等于 -1 .

也就是说,如果 y 是 x 的一个函数,那么有可能 x 并不是 y 的一个函数. 但是,在某些情况下,我们可以改善这个状况.

例 10.3 取集合 A 为全体非负实数的集合, B 也同样取为这个集合. 与前面相同,对应关系 $y=x^2$ 是一个函数:如果 x 是 A 中的一个数,那么 x^2 就是 B 中的一个数,因为一个实数的平方不可能是负数. 但现在,如果取 B 中的一个数 y ,我们总是可以回答下面这个问题: A 中的哪个数对应 y ? 比如,若 $y=9$,我们可以回答 $x=3$. 我们不必困惑是否存在第二个答案的可能性,因为 -3 不再是(新)集合 A 中的元素. 我们也不会陷入可能不存在答案的困境. 不等于实数平方的数是负数,而它们在新集合 B 中并不存在.

一般地,我们可以取一个函数 $y=f(x)$,从每个 y 的值出发,力图得出对应的 x 值. 如果这是可以做到的——也就是说,如果 x 也是 y 的函数——那么这个新的函数就被称为 $f(x)$ 的**反函数**.

因此函数 $y=x^2$,其中 $x\geq 0$ 且 $y\geq 0$,确实有一个反函数,由公式 $x=\sqrt{y}$ 给出. 这就是为什么在初等的代数学课本里,坚持用符号 $\sqrt{y}$ 表示其平方等于 y 的**非负实数**.

什么时候一个函数具有反函数呢? 这是一个很重要的问题. 我们不会在这里给出一般的答案. 我们将会观察到,如果 A 和 B 都是实轴上的区间,则定义在这些区间上的函数(此时我们仅考虑“图像不间断”的函数) $y=f(x)$

有反函数当且仅当它是单调的(持续地增加或持续地减少).图 10.1 的前两幅图[图 10.1(a),(b)]所示的是单调函数,它们有反函数,后三幅图[图 10.1(c)~(e)]所示的是在集合 A 和 B 上没有反函数的函数.

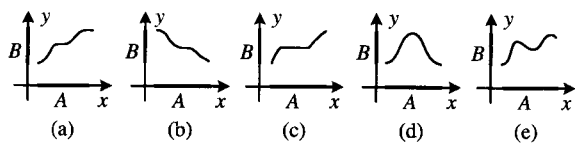


图 10.1

10.2 反正弦:正弦函数的反函数

例 10.4 方程 $y = \sin x$ 定义了从全体实数集合 A 到全体实数集合 B 的一个函数.它有没有反函数?

解 答案依然是“没有”,其原因有两个,与例 10.3 相同.对于 B 中的某些 y 值,比如 $y = 5$,不存在 x 的值使得 $\sin x = y$.对于 B 中另一些值,比如 $y = \frac{1}{2}$,则存在很多的 x 值: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$,等等.

在例 10.3 中,通过缩小该函数定义中的集合 A 和 B 而得以克服这些困难.在这里能这么做吗? 让我们看看 $y = \sin x$ 的图像(图 10.2).

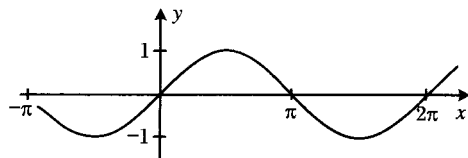


图 10.2

让我们首先把数字 0 放到集合 A 中.对于集合 A ,我们必须选取一个使得函数 $y = \sin x$ 是单调的区域,而最简单的选法就是取 A 为集合 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,如图 10.3 所示.

选取 A 为区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, B 为区间 $-1 \leq y \leq 1$, 于是对于集合 B 中的每一个 y , 都可以找到 A 中恰好一个元素 x 使得 $\sin x = y$.

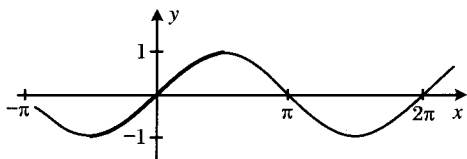


图 10.3

用这种方法所定义出来的 $y = \sin x$ 的反函数非常重要, 所以理应给它一个自己的名字. 它被称作**反正弦函数**^①, 且若 $y = \sin x$ (其中 x 和 y 分别位于上面所选定的集合里), 则我们写作 $x = \arcsin y$.

然而, 有时候需要讨论反正弦函数本身. 于是我们会写成 $y = \arcsin x$, 其中 $-1 \leq x \leq 1$, 且 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. 我们已经在计算器上见到这个函数. 下面我们会更加深入地了解它.

例 10.5 求 $\arcsin \frac{1}{2}$.

解 若 $y = \arcsin \frac{1}{2}$, 则 $\sin y = \frac{1}{2}$. 有很多角满足这个方程, 但我们必须选择那个使得 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 的唯一的 y 值. 这个值是 $\frac{\pi}{6}$, 所以 $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

例 10.6 求 $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解 若 $y = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. 因此 $y = -\frac{\pi}{3}$.

例 10.7 求 $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$.

① 我们可以用这样的方式来解读奇怪的记号 $y = \arcsin x$: 它代表的是“ y 是一段弧(arc)(或者角), 它的正弦值(sin)等于 x ”.

解 记 $y = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$, 且把这个式子改写成 $\sin y = \sin \frac{\pi}{5}$. 我们知道这个方程有很多解: $y = \frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$, 等等.

但因为我们规定了 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$ 为 $\frac{\pi}{5}$.

例 10.8 求 $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)$.

解 与前面相同, 记 $y = \arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)$, 从而 $\sin y = \sin \frac{3\pi}{5}$. 但这一次我们不能取 $y = \frac{3\pi}{5}$, 因为这个值不在规定的区间里. 然而, 在规定区间中还是有一个 y 值满足这个方程, 就是 $y = \frac{2\pi}{5}$, 而它也是我们要求出的值.

例 10.9 作函数 $y = \sin(\arcsin x)$ 的图像.

解 我们首先确定这个函数的定义域是什么. 因为在取 $\arcsin x$, 必须有 $-1 \leq x \leq 1$. 又因为 y 是某个角的正弦, 同样有 $-1 \leq y \leq 1$. 在这两个区间上, $\sin(\arcsin x)$ 非常简单, 就是 x , 所以其图像就是图 10.4.

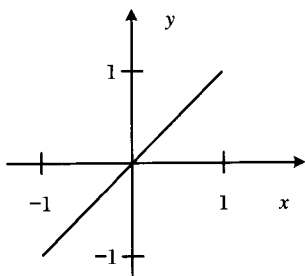


图 10.4

例 10.10 作函数 $y = \arcsin(\sin x)$ 的图像.

解 我们很快就会看到本例的图像和例 10.9 不一样! 再次从确定函数所在的区域开始. 我们可以计算任何实数的正弦值. 因为所得到的值位于 -1 到 1 的区间, 所以可以取这个值的反正弦. 因此函数 $y = \arcsin(\sin x)$ 是对任意实数 x 都有定义的, 而可能的 y 值就是反正弦函数所有可能的取值, 故 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

接下来, 让我们先对介于 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的 x 值, 看看

这个函数. 在这个区间里, 我们发现 $y = x$, 所以图像如图 10.5 所示. 但 x 可以取任意实数, 所以还没有结束. 让我们再对介于 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之间的 x 值, 看看这个函数. 在这个区间里, $\sin x$ 从 1 递减到 -1 , 所以 $y = \arcsin(\sin x)$ 的值将会从 $\frac{\pi}{2}$ 递减到 $-\frac{\pi}{2}$. 读者可以验证一下, 其图像如图 10.6 所示.

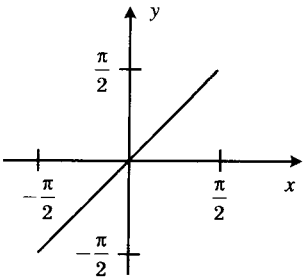


图 10.5

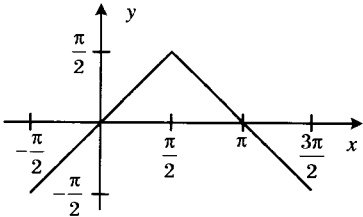


图 10.6

现在我们注意到函数 $y = \arcsin(\sin x)$ 是周期的, 且周期为 2π : $\arcsin[\sin(x + 2\pi)] = \arcsin(\sin x)$. 整个图像如图 10.7 所示.

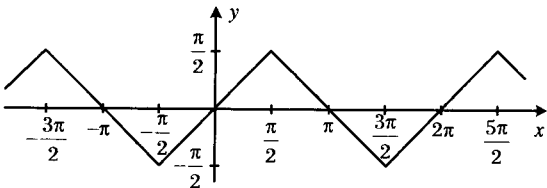


图 10.7

就像我们提到过的那样, 计算器上是有反正弦函数的. 你会发现计算器知道怎样对于任意数 x 算出

$\arcsin x$. 在计算器上能做到这个的按键有“ $\arcsin$ ”或“ $\sin^{-1}$ ”. (我们对于第二个记号并不满意, 所以只会使用第一个. ①)

用完全一样的方法, 也可以定义函数 $y = \tan x$ 的反函数. 我们取 0 附近的区间使得这个函数是单调的. 最方便的取法仍是取区间 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. 此时该反函数(称之为反正切函数, 记为 $\arctan x$)对全体实数都有定义.

这确实是一个非常好的函数, 因为它对所有实数 x 都有定义. 然而, 它的 y 值却被限制在区间 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. 事实上, 函数 $y = \arctan x$ 给了我们一个从全体实数到这个区间内所有数之间的一一对应. ②

我们还可以定义函数 $y = \cos x$ 的反函数. 但不能取对正弦函数或者正切函数所取的同样区间, 因为余弦函数在区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 不是单调的. 作为替代, 取区间 $0 \leq x \leq \pi$, 此时函数 $y = \cos x$ 是单调递减的. 我们把新函数记为 $y = \arccos x$.

例 10.11 求 $\sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$.

解 记 $\alpha = \arccos \frac{5}{13}$. 则 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, 且 $0 \leq \alpha \leq \pi$, 而我们想求的是 $\sin \alpha$. 这是前面做过的问题, 我们发现 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.

① 记号 $\sin^{-1} \frac{1}{3}$ 看上去太像记号 $\sin^2 \frac{1}{3}$, 而后者表示 $\sin \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{1}{3}$. 根据类比, 记号 $\sin^{-1} \frac{1}{3}$ “应该”表示 $\frac{1}{\sin \frac{1}{3}} = \csc \frac{1}{3}$. 但它实

际上表示完全不一样的意思. 虽然在某些书中以及在某些计算器上它还是标准的记号, 但我们不会使用它.

② 理解这一点的方法之一是说实数轴与区间 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 内有“同样多的数字”. 当数学家们开始谈论这样的语句时, 某些人可能会觉得这个断言很诡异, 因为这个区间的长度是有限的, 而实数轴的长度则是无限的. 然而, 数学家们所说的话其实意味着“长度”这个概念并不是基于所测量线段内点的“个数”的.

例 10.12 求 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

解 记 $\alpha = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$. 则 $\sin \alpha = -3/5$, 且 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 而我们想求的是 $\cos \alpha$. 因为 α 位于第四象限, 所以 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 是一个正数.

总结一下:

$y = \arcsin x$, 意味着 $x = \sin y$ 且 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

$y = \arccos x$, 意味着 $x = \cos y$ 且 $0 \leq y \leq \pi$;

$y = \arctan x$, 意味着 $x = \tan y$ 且 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.



练习

1. 求值:

(1) $\arcsin 0.5$;

(2) $\arccos 0.5$;

(3) $\arctan 1$;

(4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(6) $\arctan(-\sqrt{3})$;

(7) $\arcsin 2$.

2. 求下述表达式的数值:

(1) $\sin(\arcsin 0.5)$;

(2) $\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(3) $\tan[\arctan(-1)]$;

(4) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$;

(5) $\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{6}\right)$.

3. 证明 $\sin(\arccos b) = \pm \sqrt{1-b^2}$. 我们该取正号还是负号?

4. 用 b 表示出 $\tan(\arcsin b)$. 这里是否有不确定的

正负号?

5. 用 b 表示出 $\cos(\arctan b)$.

6. 证明对于 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 有 $\arccos(\sin \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. 对于这个集合之外的 α 值, 你能够得到什么?

7. 求下述各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{11}\right)$;

(2) $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{11}\right)$;

(3) $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{11}\right)$;

(4) $\arcsin\left(\sin \frac{4\pi}{11}\right)$;

(5) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{11}\right)$;

(6) $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{11}\right)$.

[提示: 对于大部分同学而言, 第(6)小题应该比其他小题要复杂很多.]

8. 作函数 $y = \cos(\arccos x)$ 的图像.

9. 作函数 $y = \arccos(\cos x)$ 的图像.

10. 求 $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$ 的值.

[提示: 令 $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$, $\beta = \arcsin \frac{5}{13}$, 然后使用关于 $\sin(\alpha + \beta)$ 的公式.]

11. 回忆一下 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$. 用这个公式, 证明 $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$. 其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan a + \arctan b < \frac{\pi}{2}$.

12. 图 10.8 显示了三个相同的正方形, 其中角度 α , β , γ 如图所示. 证明 $\alpha + \beta = \gamma$.

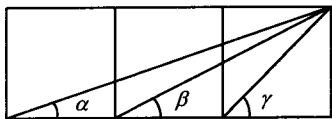


图 10.8

(提示: $\alpha = \arctan \frac{1}{3}$, $\beta = \arctan \frac{1}{2}$ 且 $\gamma = \arctan 1$.

然后应用第 11 题的结论.)

13. 附加题: 你能否不用三角函数证明第 12 题中的结论?

10.3 反函数作图

一个函数的图像和它的反函数的图像之间有什么关系呢?

例 10.13 令 $y = x^2$, 其中 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$. 正如所看到的那样, 它是单调递增的. 如图 10.9 所示.

我们可以从这个图中读出该函数的值. 比如, 图中显示了 $f(2) = 4$, 因为在图上, x 值 2 对应于 y 值 4.

就像我们已经看到的那样, 反函数是 $g(y) = \sqrt{y}$. 图 10.9 也包含了所需要的用以求该反函数值的信息. 只要先在 y 轴上选第一个数字, 然后用图 10.9 就可以得到 x 轴上对应的数. 比如, 如果想得到 $g(4)$, 先在 y 轴上找到数字 4, 然后用图就可以找到 x 轴上对应的数 (也就是 2).

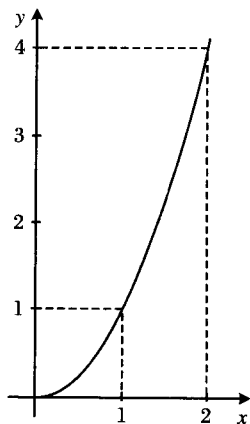


图 10.9

然而,很多人可能会更倾向于用字母 x 代表集合 A 中的数,这是函数需要指定其值的数,而用字母 y 代表集合 B 中的元素,它们是该函数为 x 所指定的值.有两种方法可以适应这个需求.我们可以简单地把原图中的轴重新标一下字母,如图 10.10 所示.但很多人更喜欢让 x 轴在纸面上呈水平状, y 轴呈竖直状.我们也可以把整个图像沿着对角直线翻转一下,得到图 10.11.此图和图 10.10 含有完全一样的信息,但形式上更符合我们的习惯.

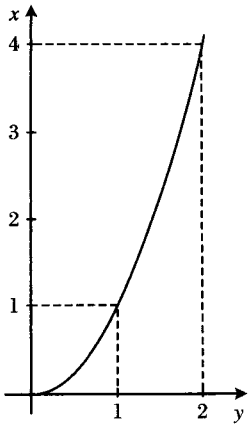


图 10.10

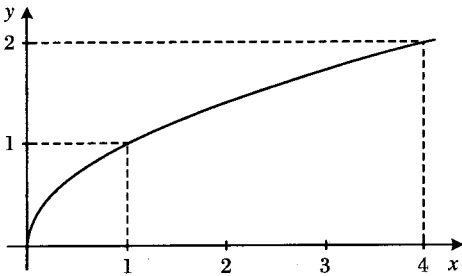


图 10.11

图 10.12 是正弦函数及其反函数(即反正弦函数)的图像.反函数的图像是用符合惯例的形式给出的.注意函数的定义域被限制在前面所讨论的范围内.

图 10.13 所示的是 $y = \arccos x$ 和 $y = \arctan x$ 的图像.函数 $y = \arctan x$ 的图像清楚地表明了这个函数是怎么把整个实数轴映到一个有限的区间内.

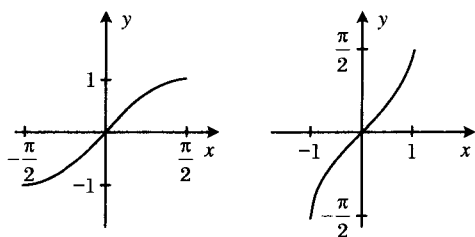


图 10.12

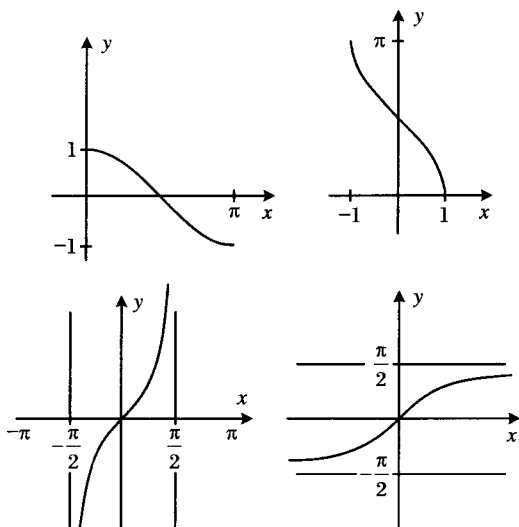


图 10.13

10.4 三角方程

我们常常需要求解一些三角方程,也就是出现了未知量的三角函数的方程.我们经常用下面的方法来解三角方程:

(1) 把方程转化成以下形式: $\sin x = a$, $\cos x = a$ 或者 $\tan x = a$;

(2) 找到这些简单方程介于 0 和 2π 之间的解;

(3) 利用 $\sin x$, $\cos x$ 或 $\tan x$ 这些函数的周期性来找到所有的解.

我们从一个简单的例子开始.

例 10.14 解方程 $\sin x = \frac{1}{2}$.

这意味着我们需要找到所有满足 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的 x 值.

我们将给出两种方法来求这些值. 第一种方法用到了圆, 第二种方法用到了函数 $y = \sin x$ 的图像.

解法 1 首先使用一个圆心位于原点的单位圆. 第一步, 找出两个特殊的解. 我们回忆一下 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 并用图形表明这一点. 即作一个 $\frac{\pi}{6}$ 的角, 然后找到长度等于 $\frac{1}{2}$ 的线段, 如图 10.14 所示.

这是第一个解.

但是如果作一条水平直线穿过这个圆, 我们就会发现另一个其正弦值等于 $\frac{1}{2}$ 的角, 如图 10.15 所示. 所以我们有了解 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$. 它们都是在区间 $0 \leq x \leq 2\pi$ 里的可能的解.

为了求出更多的解, 注意到可以绕着圆想转多少(完整的)圈就转多少圈(既可以是顺时针方向, 也可以是逆时针方向), 然后我们还是可以回到同样的点.

从第一个解, 可以得到新的值 $\frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \frac{\pi}{6} \pm 6\pi$, 等等. 我们可以把这些角记作 $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, 其中 n 是任意整数.

从第二个解, 可以得到新的值 $\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \frac{5\pi}{6} \pm 6\pi$, 等等. 我们可以把这些角记作 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, 其中 n 是任意整数.

所以有两列解:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

其中 n 是任意整数. 这两个序列含有方程的所有解.

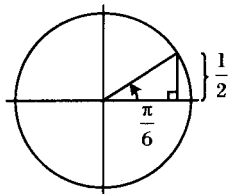


图 10.14

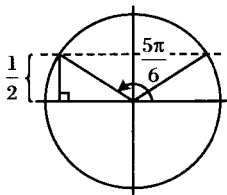


图 10.15

我们也可以更加简洁地表示出这些解. 从最基本的解 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{5\pi}{6}$ 开始, 把 $\frac{5\pi}{6}$ 写成 $\pi - \frac{\pi}{6}$. 于是第二列解就变成了 $\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. 所以我们可以把这两列解写为

$$2n\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$(2n+1)\pi - \frac{\pi}{6},$$

其中 n 是任意整数. 现在注意到表达式 $2n\pi$ 表示 π 的任意偶数倍, 此时我们需要把它加上 $\frac{\pi}{6}$ 才能得到方程的解, 而 $(2n+1)\pi$ 表示 π 的任意奇数倍, 需要把它减去 $\frac{\pi}{6}$ 才能得到解. 所以我们可以简练地把方程的解写为

$$\pi k + (-1)^k \frac{\pi}{6},$$

其中 k 是任意整数.

读者可以验证对于 $k = 2n$ (也就是对于偶数 k), 我们得到第一列解, 而对于 $k = 2n+1$ (也即是奇数 k), 我们得到第二列解.

解法 2 我们可以用 $y = \sin x$ 的图形来解方程. 首先, 沿着函数 $y = \sin x$ 的图形, 作一条直线 $y = \frac{1}{2}$, 如图 10.16 所示.

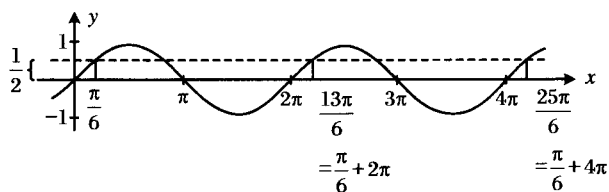


图 10.16

这条直线与图形相交于 x 坐标等于 $\frac{\pi}{6}$ 的一个点. 这是我们的第一个初始解. 因为 $y = \sin x$ 的图形具有周期 2π , 所以我们可以发现更多的解, 其 x 坐标分别为 $\frac{\pi}{6} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{6} \pm 4\pi$, $\frac{\pi}{6} \pm 6\pi$, 等等.

直线 $y = \frac{1}{2}$ 与图形还相交于 x 坐标等于 $\frac{5\pi}{6}$ 的点. 这是我们的第二个初始解. 周期性再一次给了我们更多的解, 它们的 x 坐标分别为 $\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \frac{5\pi}{6} \pm 6\pi$, 等等 (图 10.17). 所以, 与前面一样, 我们两列解: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ 和 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, 而我们可以把它们简洁地记为 $\pi k + (-1)^k \frac{\pi}{6}$, 其中 k 是任意整数.

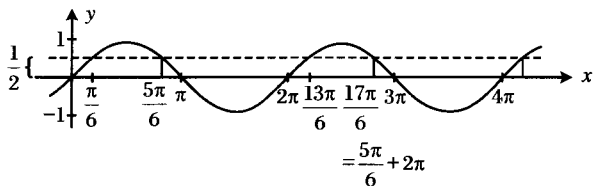


图 10.17

一般地, 如果需要解一个简单的三角方程, 我们可以先找到所有介于 0 和 2π 之间的解, 然后用周期性得到所有的解.

练习

1. 利用图 10.17, 求出 x 轴上所有满足 $\sin x > \frac{1}{2}$ 的点 x .

2. 解方程 $\sin x = -\frac{1}{2}$.

3. 解方程 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 解方程 $\tan x = 1$.

5. 解方程 $\sin x = -1$.

10.5 一个更一般的三角方程

取某个锐角 α . 对于方程 $\sin x = \sin \alpha$, 其中有一个解是显而易见的, 即 $x = \alpha$, 如图 10.18 所示.

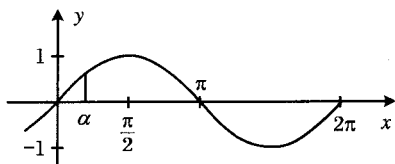


图 10.18

然后周期性就给出一系列解 $\alpha + 2n\pi$, 其中 n 是任意整数.

还有第二个显然的解: $x = \pi - \alpha$. 如图 10.19 所示.

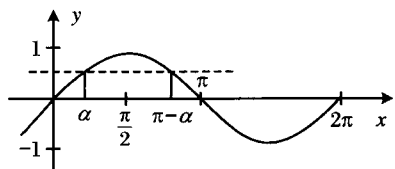


图 10.19

这个解给出第二列解, 它们可以被写成 $\pi - \alpha + 2n\pi$, 其中 n 是任意整数.

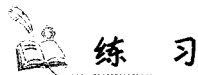
所以, 该方程的解是

$$\alpha + 2n\pi \quad \text{和} \quad \pi - \alpha + 2n\pi.$$

其中 n 是任意整数. 与前面相同, 我们可以把这个结果简洁地记为

$$k\pi + (-1)^k \alpha,$$

其中 k 是任意整数.



1. 解方程 $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$.

2. 解方程 $\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$.

3. 用函数 $y = \cos x$ 的图像, 证明方程 $\cos x = \cos \alpha$ (其中 α 是某个锐角) 的解由 $2\pi n + \alpha$ 和 $2\pi n - \alpha$ 给出, 其中 n 是任意整数.

4. 解方程 $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$.

5. 用函数 $y = \tan x$ 的图像, 证明方程 $\tan x = \tan \alpha$ (其中 α 是某个锐角) 的解由 $\alpha + \pi n$ 给出, 其中 n 是任意整数.

6. 解方程 $\tan x = \tan \frac{\pi}{5}$.

7. 假设 α 是某个固定的角. 用 α 表示出方程 $\sin x = -\sin \alpha$ 的所有解.

[提示: 方法之一是回忆一下 $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$.]

8. 假设 α 是某个固定的角. 用 α 表示出方程 $\cos x = -\cos \alpha$ 的所有解.

9. 验证公式 $x = (-1)^n \alpha + \pi n$ 给出了方程 $\sin x = \sin \alpha$ 的所有解, 其中 n 取遍所有的整数值.

10.6 更复杂的三角方程

例 10.15 解方程 $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

解法 1 这个方程等价于以下两个方程:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{或} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

第一个方程在 0 到 2π 之间有两个解. 它们分别是 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{11\pi}{6}$, 如图 10.20 所示. 然后由周期性给出了第一个方程的两列解: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ 和 $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, 其中 n 是任意整数.

现在求解第二个方程. 方程 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在 0 到 2π

之间有两个解,即 $\frac{5\pi}{6}$ 和 $\frac{7\pi}{6}$,如图 10.21 所示. 然后由周期性给出了另外两列解: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ 和 $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$,其中 n 是任意整数.

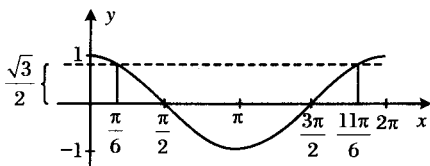


图 10.20

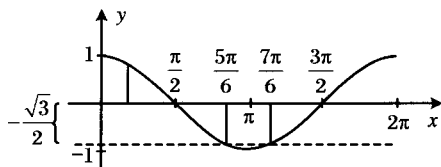


图 10.21

把这些解都放在一起,我们就得到了四列解:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,$$

其中 n 是任意整数. 请读者们努力找到一个简洁的公式, 给出所有这些解.

解法 2 (梗概) 我们可以算出 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$. 然后解出 $2x$ (比如, 看一看函数 $y = \cos 2x$ 的图像), 从而得到 $2x$ 的两列值. 最后, 将求出的每个值都除以 2, 就解出了 x .

例 10.16 解方程 $\sin x = \cos x$.

解法 1 回想一下 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 从而将该方程用正弦函数重写一遍:

$$\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

但我们在前面已经看到了, 方程 $\sin x = \sin \alpha$ 有两列解:

$$x = \alpha + 2\pi n,$$

$$x = (\pi - \alpha) + 2\pi n.$$

其中 n 是任意整数. 我们把这个结果用于 $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$. 从

第一列解, 可以得到 $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. 从第二列解, 可以得到

方程 $x = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n$, 而这个方程根本没有解.

所以方程 $\sin x = \cos x$ 的解由下面这个序列给出:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

其中 n 是任意整数.

解法 2 如果把方程的两边同除以 $\cos x$, 我们就得到一个只和正切函数有关的新方程: $\tan x = 1$.

在 0 到 π 中间, 它仅有一个解 $x = \frac{\pi}{4}$. 因为正切函数的周期是 π , 所以这个原始的解给出了所有的解, 它们可以被写成 $\frac{\pi}{4} + \pi n$, 其中 n 是任意整数.

一个不易看出的要点: 当除以 $\cos x$ 时, 我们需要验证这个表达式不会等于 0 . 事实上, 如果 $\cos x = 0$, 我们不会有 $\cos x = \sin x$, 因为对于同一个 x 值, 这两个函数不可能同时为 0 .

例 10.17 解方程 $\sin x = \cos 2x$.

我们还是给出两种解法: 可以把该方程用正弦函数改写, 也可以像例 10.15 的第二种解法那样求解.

解法 1 改写成正弦函数的方程, 可以得到 $\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$.

现在我们可以与例 10.16 的第一种解法一样, 区分两种情形.

在第一种情形, 若 $x = \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + 2\pi n$, 则 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, 这给出一列解.

在第二种情形, 我们有 $x = \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right] + 2\pi n$.

由此可得 $x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n$. 这是第二列解.

解法 2 我们知道, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (参见第 8 章). 所以可以把所给的方程改写为

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x,$$

即

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

我们可以试着用因式分解的方法解出 $\sin x$ (如果这个方法不奏效, 可以用二次方程求根公式). 我们得到 $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$, 所以 $\sin x = \frac{1}{2}$ 或者 $\sin x = -1$.

我们可以用已经学过的方法, 分别求解这两个方程.

对于 $\sin x = \frac{1}{2}$, 得到 $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ 或者 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, 其中 n 是任意整数.

对于 $\sin x = -1$, 得到 $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, 其中 n 是任意整数.

所以有三列解.

例 10.18 解方程 $\tan^2 x = 3$.

解 该方程等价于下面两个方程:

$$\tan x = \sqrt{3} \quad \text{或} \quad \tan x = -\sqrt{3}.$$

对于第一个方程, 最简单的解是 $x = \frac{\pi}{3}$, 而周期性给出了所有解 $\frac{\pi}{3} + \pi n$, 其中 n 是任意整数.

对于第二个方程, 最简单的解是 $x = -\frac{\pi}{3}$, 而周期性给出了所有解 $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, 其中 n 是任意整数. 这两列解合在一起就给出了全部的解.

总结一下: 首先, 注意到我们已经证明了 (见第 8 章中的附录 2) 任意三角恒等式都可以被化为一个代数恒等式. 这个结论对于三角方程也成立. 然而, 所得到的代数方程往往要比该方程的三角形式复杂很多.



练习

1. 求下述方程的解.

(1) $\sin 2x = 1$;

(2) $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$;

(3) $\cos x = \sin 2x$;

(4) $\sin x = \sin 3x$;

(5) $\cos x = \sin 4x$;

(6) $26\sin^2 x + \cos^2 x = 10$;

(7) $\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x$;

(8) $3\tan^2 x = 12$;

(9) $\cos 2x = 2\sin^2 x$;

(10) $\tan^2 x = \cot x$;

(11) $\frac{5}{\cos^2 x} = 7\tan x + 3$;

(12) $\sqrt{3}\tan^2 x + 1 = (1 + \sqrt{3})\tan x$.

2. 让我们回过头来再看看例 10.17. 第一种解法给出的通解是

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},$$

或

$$x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n,$$

其中 n 是任意整数.

而第二种解法给出的通解是

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

或

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

或

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$

其中 n 是任意整数.

证明这两组解实际上是一样的.

附录 奇迹揭秘

在第 6 章我们讨论了两个小奇迹：

切线奇迹

如果我们在点 $x = \alpha$ 处作曲线 $y = \sin x$ 的切线, 则该切线与 x 轴的交点 R 和点 $(\alpha, 0)$ 之间的距离等于 $|\tan \alpha|$.

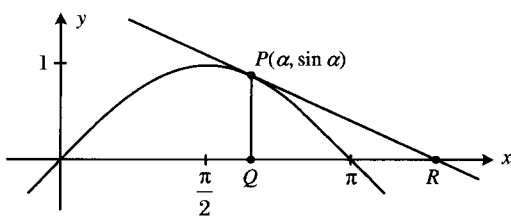
拱形奇迹

曲线 $y = \sin x$ 的一段“拱”下方的面积是 2.

我们现在回到这些结果, 并完成它们的证明.

附录 1 切线奇迹的证明

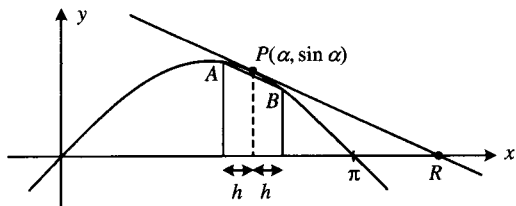
附图 10.1 显示了曲线 $y = \sin x$ 上的一个点 $P(\alpha, \sin \alpha)$. 过该点的切线与 x 轴相交于点 R . 我们要证明 $QR = |\tan \alpha|$, 方法是写出直线 PR 的方程, 然后算出点 R 的坐标.



附图 10.1

我们可以用直线上某一个点的坐标以及该直线的斜率, 写出该直线的方程. 我们要用的点是 P , 其坐标是 $(\alpha, \sin \alpha)$.

为了得到直线 PR 的斜率, 要用来自微积分的一个知识. 我们不是直接看切线 PR 本身, 而是看曲线 $y = \sin x$ 的交点在点 P 附近的割线. 在曲线上取两个点 A 和 B , 一个正好位于点 P 的左边一点点, 另一个正好在其右边一点点, 且这两个点在 x 轴方向都与点 P 相距很小的距离 h , 如附图 10.2 所示.



附图 10.2

点 A 的坐标是 $(\alpha - h, \sin(\alpha - h))$, 点 B 的坐标是 $(\alpha + h, \sin(\alpha + h))$. 从这两个点, 我们可以算出割线 AB 的斜率:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha + h) - \sin(\alpha - h)}{2h} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos h + \cos \alpha \sin h - (\sin \alpha \cos h - \cos \alpha \sin h)}{2h} \\ &= \frac{2\cos \alpha \sin h}{2h} = \cos \alpha \left(\frac{\sin h}{h} \right). \end{aligned}$$

取越来越小的(正的) h , 使得点 A 和 B 变得越来越近, 从而割线 AB 看起来就和切线 PR 重叠. 当 h 趋近于 0 时, 表达式 $\frac{\sin h}{h}$ 变得越来越接近于 1. 而在 h 趋近于 0 时, $\cos \alpha$ 没有变化. 所以割线 AB (它看来越来越接近于切线 PR) 的斜率就变得越来越接近于 $\cos \alpha$. 所以, 有理由相信 PR 的斜率正好就是 $\cos \alpha$. (在微积分中, 这个求曲线切线斜率方法的合理性会得到完整的论证. 它与函数的导数有关.)

现在可以求出直线 PR 的方程. 因为它经过点 $P(\alpha, \sin \alpha)$ 且斜率为 $\cos \alpha$, 所以

$$\frac{y - \sin \alpha}{x - \alpha} = \cos \alpha.$$

对于点 R 的 x 坐标, 由于它的 y 坐标是 0, 所以它的 x 坐标可以通过在上述方程中令 $y=0$ 而计算出来. 于是得到

$$x = \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \alpha - \tan \alpha.$$

所以 QR 的长度是 $|\alpha - (\alpha - \tan \alpha)| = |\tan \alpha|$.



练习

1. 附图 10.2 中所显示的是 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 的一种情形. 取一个 α 使其数值稍微大于 $\frac{\pi}{2}$ (比如, $\alpha = 1.6$), 然后重复上面的证明. (注意对这样的 α 值, 有 $\tan \alpha < 0$.)
2. 取一个位于 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的 α 值, 重复上面的证明. (注意对于这样的 α 值, 有 $\tan \alpha > 0$.) 此时点 R 会落在什么地方?
3. 什么时候点 R 会落在原点处?
4. 当 α 非常接近于 $\frac{\pi}{2}$ 时, 点 R 会落在什么地方? 你的回答是如何依赖 α 是大于还是小于 $\frac{\pi}{2}$ 的?

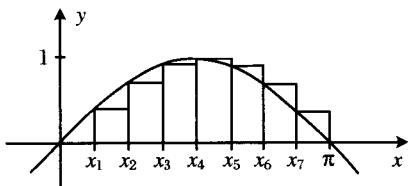
附录 2 拱形奇迹的证明

这个奇迹所涉及的是曲线 $y = \sin x$ 的一个“拱”下方的面积, 而我们断言它恰好等于 2. 在 6.6 节我们已经证明这个面积 A 满足不等式 $\frac{\pi}{2} < A < \pi$. 现在证明这一点的方法是作直线形来逼近面积 A . 通过取一系列直线形区域使之越来越接近我们欲求其面积的区域, 我们可以改进这个估计. 下面用矩形来构造这样的直线形区域.

取 x 轴上从 0 到 π 的区间, 将它分割成很多相等的小段. 若我们把它分成了 n 段, 则所用的分割点分别是 $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}$ 和 $x_n = \frac{n\pi}{n} = \pi$. 对于每个点 x_i , 我们作一个矩形, 方法是以 x_i 为一个端点, 作一条垂直于 x 轴的线段, 使它的另一个端点落在曲线 $y = \sin x$ 上. 附图 10.3 所示的是 $n = 8$ 的情形:

注意, 对于 $0 < x_i < \frac{\pi}{2}$, 这些矩形是内嵌于“拱”的内部, 而对于 $\frac{\pi}{2} < x_i < \pi$, 它们则是围在“拱”的周围. 此外,

这些矩形的宽都是 $\frac{\pi}{n}$. 记 $h = \frac{\pi}{n}$, 则当 h 趋近于 0 时, 这些矩形变得越来越“瘦”, 但数量越来越多, 而它们的面积之和则趋近于面积 A .



附图 10.3

最后注意, 对应于 $x_0 = 0$ 和 $x_n = \pi$ 的长方形都是“退化的”: 它们的面积是 0 (无论我们把 n 取成多少). 对我们而言, 比较便利地是忽略对应于 x_0 的矩形, 但仍然保留对应于 x_n 的矩形. 然后可以把这些小矩形的面积之和写成

$$\begin{aligned}
 & h \sin x_1 + h \sin x_2 + h \sin x_3 + \cdots + h \sin x_n \\
 &= h \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\
 &= h \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right) \sin \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} \\
 &= h \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\
 &= h \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n}}.
 \end{aligned}$$

当 n 很大时, 这些矩形看起来越来越接近于区域 A . 但当 n 变得非常大时, 分数 $\frac{n+1}{n}$ 趋近于 1. 因此, 关于 A 的表达式越来越接近于

$$h \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{h}{\sin \frac{h}{2}}.$$

现在如果记 $k = \frac{h}{2}$, 上述表达式就等于 $\frac{2k}{\sin k} = 2 \cdot \frac{k}{\sin k}$.

当 h 越来越接近于 0 时, k 也是如此, 从而表达式 $\frac{\sin k}{k}$ 趋近于 1. 它的倒数, 即 $\frac{k}{\sin k}$, 也趋近于 1. 这就告诉我们, 逼近 A 的那个和式越来越接近于 $2 \cdot 1 = 2$. 这真是一个神奇的结果!

在微积分里, 这种求曲线下方面积的方法与函数的积分有关.

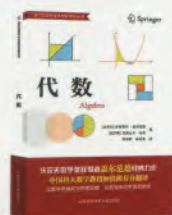


练习

1. 使用计算器, 分别取 $n = 4$ 和 $n = 8$, 求 A 的近似值.

2. 你觉得对于曲线 $y = \sin x$ 位于 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间的这段曲线, 其下方的面积是多少?

3. 试一试用上面所示的方法, 算一算曲线 $y = \sin x$ 位于 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间的这段曲线下方的面积. 这个结果是你所预期的吗?



扫一扫，发送解答

如果你想成为本书的“作者”之一，请将自己的解题过程(无需计算的，可直接给出答案)告诉我们，你的姓名将可能出现在书中。

分散在书中的问题是富有教益的、有趣的，常常很吸引人，而且总能激励人去思考。学生和教师都能从这些杰出的数学著作中学到很多东西。

——伍鸿熙（国际著名数学教育家，美国加州大学伯克利分校教授）

教学的目的是期望学生了解现象背后的本质，而不仅是让他们记住一些解决问题的方法。这套书包含了一些实际问题，这些问题让读者的思想有了更多发展的可能。

——《美国数学月报》

伊斯雷尔·盖尔范德（1913—2009），数学家、数学物理学家、生物学家，苏联科学院院士。1978年获首届沃尔夫数学奖（该奖和菲尔兹奖被共同誉为数学界的诺贝尔奖），创立了“盖尔范德学派”，先后在苏联和美国建立了旨在促进中学数学教育的函授学校，并为中学生撰写了多本优秀教材。

定价：65.00元

ISBN 978-7-312-04695-7



9 787312 046957 >

选题编辑：田 雪 于秀梅

责任编辑：康玉峰

封面设计：
——SUNNYSIDE——
洞一文化·一生万物